微分方程I 习题课讲义

硕士19级　数学科学学院　吴天

2019年12月19日

前　言

微分方程I, 在中国科大是一门数学系的基础必修课. 它的主要内容包括: 常微分方程和偏微分方程两部分. 常微分方程主要包括一阶方程的初等积分法、解的存在唯一性与延拓、奇解与包络、高阶方程与线性微分方程组、幂级数解法与迭代法等; 偏微分方程主要包括一阶拟线性偏微分方程的特征线、运输方程、波动方程、扩散方程、Fourier方法、调和函数与Laplace方程的基本解、对数梯度估计等.

本讲义将习题课的主要内容罗列出来, 可以说一个提纲. 为避免大家查阅困难, 我尽量将公式安排的紧凑, 因此看似页数虽少, 但内容颇多. 不仅如此, 证明大多比较简略, 一来启发大家思考, 二来缩短篇幅. 水平有限, 如有谬误, 还望批评指正.

本课程的另两位助教: 徐恒博士和葛霖硕士, 他们也在讲解习题课之后将所讲内容加入进来, 特此感谢两位助教为习题课讲义提供的内容!

2019秋-微分方程I助教 吴天

2019年10月13日

于 中国科学技术大学

目　录

前　言 **i**

1　预备知识 **1**

1.1　一些需要了解的公式 1

1.2　有理函数的原函数 2

1.3　巧用Euler积分计算定积分 3

1.4　复矩阵的Jordan标准形理论 4

2　一阶常微分方程的初等解法 **5**

2.1　分离变量法 5

2.2　齐次方程及其变形 5

2.3　一阶线性方程 7

2.4　积分因子法 7

2.5　因变量可解出型 9

2.6　参数变换法 9

2.7　三种著名的方程 10

2.8　综合例题 11

3　微分方程组与高阶方程 **12**

3.1　常系数线性微分方程 12

3.2　常系数线性微分方程组 13

4　一阶拟线性常微分方程定性理论初步 **17**

4.1　常微分方程的几何含义 17

4.2　解的局部存在唯一性 17

5　一阶拟线性偏微分方程 **19**

5.1　一阶线性偏微分方程的求解 19

5.2　一阶拟线性偏微分方程的求解 20

5.3　运输方程与波动方程的d'Alembert公式 20

6 二阶偏微分方程的基本方法 **21**
6.1 二阶半线性方程的分类与标准型 21

7 调和函数的性质 **23**
7.1 调和函数与平均值性质 23
7.2 调和函数的梯度估计 24
7.3 Laplace方程的基本解 25
7.4 Harnack不等式 30

参考文献 **34**

第1讲　预备知识

秋名山上行人稀, 常有车手较高低. 旧时车道今犹在, 不见当年老司机.

——某位车技高超的助教

---

§1.1　一些需要了解的公式

在数学分析中, 我们主要学习了微积分的有关知识, 其中一些基本结论是需要我们熟练掌握的. 现将一些容易忽略的公式介绍如下.

一些基本函数的导数公式:

$$(\tan x)'=\sec^2 x \qquad (\cot x)'=-\csc^2 x \qquad (\sec x)'=\sec x\tan x \qquad (\csc x)'=-\csc x\cot x$$

5 $$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2} \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,a\neq 1)$$

【例1.1.1】计算幂指函数$(u(x))^{v(x)}$的导数.

解　记$f(x)=v(x)\ln(u(x))$, 则$f'(x)=v'(x)\ln(u(x))+\dfrac{v(x)u'(x)}{u(x)}$.

$$\therefore \left(u(x)^{v(x)}\right)'=\left(\mathrm{e}^{f(x)}\right)'=(u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\ln(u(x))+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right).$$

【例1.1.2】求证:$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}=n(n+1)2^{n-2}\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

证明　构造$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}$之后通过求导和积分等操作可得.　□

常见的Taylor展开如下:

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \qquad \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\ (-1<x\leqslant 1) \qquad \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\ (-1<x\leqslant 1)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\ (|x|<1),\text{ 其中}\binom{\alpha}{n}=\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha-k)\ (\forall\alpha\in\mathbb{R})$$

一些基本函数的积分公式:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\operatorname{arcsinh}x+C=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C \qquad \int \ln x \mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

【例1.1.3】$\int \operatorname{sech} x \mathrm{d}x$.

解 $\int \operatorname{sech} x \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sinh x)}{\cosh^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\sinh x)}{1+\sinh^2 x} = \arctan(\sinh x) + C.$

§1.2 有理函数的原函数

称$\frac{P(x)}{Q(x)}$ $(P, Q \in \mathbb{R}[x])$形式的函数为有理函数. 定义它的次数:

$$\deg \frac{P(x)}{Q(x)} = \deg P(x) - \deg Q(x).$$

定理1.1 设$P[x], Q[x] \in \mathbb{R}[x]$, 且$Q(x)$在$\mathbb{R}$上的完全因子分解:

$$Q(x) = b_m \prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{l}(x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{s_j}$$

其中$m = \deg Q$, $\sum_{i=1}^{k} r_i + 2\sum_{j=1}^{l} s_j = m$, $\beta_j^2 < 4\gamma_j$, 则存在$A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$, 使得

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{A_{ij}}{(x-\alpha_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+\beta_i x+\gamma_i)^j}.$$

【例1.2.1】$\int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x$.

解 设$\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x-1)^3} \cdots (\bigstar)$

在$(\bigstar)$两侧同乘x, 并令$x=0$: $a=-1$;

在$(\bigstar)$两侧同乘$(x-1)^3$, 并令$x=1$: $d=2$;

在$(\bigstar)$两侧同乘x, 并令$x\to+\infty$: $b=2$;

此时, 将$x=2$代入$(\bigstar)$:$c=1$.

$$\therefore \int \frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}\mathrm{d}x = \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} - \frac{x}{(x-1)^2} + C.$$

【例1.2.2】

$$\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{x+1} + C.$$

【例1.2.3】$\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{(x^2-2x+5)^2} + 8\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2}.$

注意到$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+5} = \frac{x}{x^2-2x+5} + \int \frac{2x^2-2x}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{x-1}{x^2-2x+5} + 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+5} - 8\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2-2x+5)^2}$$

$$\therefore \int \frac{5x+3}{(x^2-2x+5)^2}\mathrm{d}x = \frac{2x-7}{2(x^2-2x+5)} + \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C.$$

对于关于$\sin x$, $\cos x$的有理函数, 我们可以通过万能变换:$t = \tan\frac{x}{2}$化为关于t的有理函数.

【例1.2.4】$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)} \xlongequal{t=\tan\frac{x}{2}} \int \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$

§1.3 巧用Euler积分计算定积分

我们有如下Euler积分的定义:

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t\ (s>0),\ B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x\ (p,q>0).$$

它们具有如下性质:

(1)$\Gamma(n+1)=n!\ (\forall n\in\mathbb{N})$; (2)(递推公式)$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$;

(3)(余元公式)$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\dfrac{\pi}{\sin p\pi}\ (\forall 0<p<1)$; (4)$B(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (p,q>0)$;

(5)(Legendre加倍公式)$\Gamma(2s)=\dfrac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma(s+\dfrac{1}{2})$.

定理1.2 $\forall\alpha,\beta>-1$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha}x\sin^{\beta}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right)$.

证明 设$t=\sin^2 x$, 则$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\alpha}x\sin^{\beta}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\beta-1}{2}}(1-t)^{\frac{\alpha-1}{2}}\mathrm{d}t$. □

【例1.3.1】$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(6)}=\frac{3\pi}{512}$.

【例1.3.2】计算$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$.

解 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)!n!}{(2n)!}=\sum_{n=1}^{\infty}B(n,n+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 t^n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t.$$

注意到$|t^n(1-t)^{n-1}|\leqslant\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$, 故$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}$在$[0,1]$上一致收敛, 于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}t^n(1-t)^{n-1}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{t}{t^2-t+1}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【例1.3.3】证明:$\displaystyle\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\ln\sqrt{2\pi}$.

证明 记$I=\displaystyle\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$, 则

$$2I=\int_0^1\ln\left(\Gamma(x)\Gamma(1-x)\right)=\ln\pi-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

记$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$, 则

$$2J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{\sin 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\ln 2,$$

因此$J=-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$, 从而$I=\ln\sqrt{2\pi}$. □

以下两道题目留作练习:

【例1.3.4】证明:$\displaystyle\int_0^1\sin\pi x\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\ln\frac{\pi}{2}+1\right)$. □

【例1.3.5】证明:$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2(\frac{1}{4})$. □

§1.4 复矩阵的Jordan标准形理论

本节的矩阵均在复数域内考察. 记$N_n=\sum\limits_{i=1}^{n-1}E_{i,i+1}$, 称$J_n(\lambda)=\lambda I_n+N_n$为以$\lambda$为特征值的$n$阶Jordan块. 称$J$为Jordan矩阵, 如果$\exists\{J_i\}_{i=1}^{s}$为Jordan块, 使得$J=\mathrm{diag}(J_1,\cdots,J_s)$.

定理1.3 (Jordan相似标准化定理)$\forall A\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\exists P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, J为Jordan矩阵, 使得$P^{-1}AP=J$.

下面通过具体例子给出如何计算Jordan标准形和过渡矩阵P.

【例1.4.1】求$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&2&0&1&2&3\\0&0&2&0&1&-1\\0&0&0&2&1&2\\0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}$的Jordan标准形$J$, 并求可逆方阵$P$, 使$P^{-1}AP=J$.

解 特征多项式$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^5$. 研究$A$的根子空间:

$(A-2I)^3x=0$的解空间为$\mathrm{span}\{x_1^{(3)}\}$, 其中$x_1^{(3)}=(0,0,0,0,1,-2)^T$. 其对应的链为:

$$x_1^{(2)}=(A-2I)x_1^{(3)}=(-1,-4,3,-3,0,0)^T,\ x_1^{(1)}=(A-2I)x_1^{(2)}=(-3,-3,0,0,0,0)^T.$$

$(A-2I)^2x=0$的解空间为$\mathrm{span}\{x_1^{(2)},x_2^{(2)}\}$, 其中$x_2^{(2)}=(-3,0,0,0,1,0)^T$. 其对应的链为:

$$x_2^{(1)}=(A-2I)x_2^{(2)}=(4,2,1,1,0,0)^T.$$

$(A-I)x=0$的解空间为$\mathrm{span}\{y\}$, 其中$y=(1,0,0,0,0,0)^T$. 经检查, 它们确实线性无关.

$$\therefore P=(y,x_1^{(1)},x_1^{(2)},x_1^{(3)},x_2^{(1)},x_2^{(2)})=\begin{pmatrix}1&-3&-1&0&4&-3\\0&-3&-4&0&2&0\\0&0&3&0&1&0\\0&0&-3&0&1&0\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&-2&0&0\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&2&1\\0&0&0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

实际上, 求出的P和J均不是唯一的, 因为根向量的取法不唯一, 并且Jordan块的顺序不唯一. 不过对应的根向量必须与对应的Jordan块代表的根子空间相对应.

【例1.4.2】计算$J_n(\lambda)^k$ $(k\in\mathbb{N}^*)$.

解 当$\lambda=0$时, $J_n(0)^k=N_n^k=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n-k}E_{j,j+k}, & k<n,\\ 0, & k\geqslant n.\end{cases}$

当$\lambda\neq 0$时, $J_n(\lambda)^k=(\lambda I_n+N_n)^k=\sum\limits_{j=0}^{k}\dbinom{k}{j}\lambda^{k-j}N_n^j$.

【例1.4.3】证明$\mathrm{e}^A=P\mathrm{e}^JP^{-1}$, 其中$A$的Jordan相似标准化为$A=PJP^{-1}$.

解 $\mathrm{e}^A=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{A^j}{j!}=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\dfrac{PJ^jP^{-1}}{j!}=P\mathrm{e}^JP^{-1}$. □

结合这两道例题, 我们知道: 计算一个矩阵的指数, 只要将其Jordan标准化即可, 这是因为Jordan标准形的整数次幂是容易计算的.

第2讲　一阶常微分方程的初等解法

本讲无特别说明, 记$p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

§2.1　分离变量法

顾名思义, 分离变量法适用于x, y两个变量是分开的状态, 这时可以直接积分求解. 只需在分离变量的时,候注意好别丢掉分母为0引起的特解即可.

【例2.1.1】$y' = \tan y$.

解　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\tan y} = \mathrm{d}x$, 两侧积分: $x = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{\tan y} = \ln|\sin y| + C$, 即$y = \arcsin(C\mathrm{e}^x)$ $(|C\mathrm{e}^x| \leqslant 1)$.
注意到$y = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$也是特解, 因此最终通解为$\sin y = C\mathrm{e}^x$ $(C \in \mathbb{R})$.

容易看出, 上题的解是具有多个分支的, 即y可以取任一主值区间. 我们再看下面这个问题.

【例2.1.2】$y' = \tan y$, $y(0^-) = \dfrac{\pi}{2}$.

解　利用上一问的结果得到$C = 1$, 因此解为$\sin y = \mathrm{e}^x$ $(x < 0 < y < \dfrac{\pi}{2})$.

仔细研究可以发现, 上题在y的其他主值区间也存在很多满足方程的解, 但是它们与本题得到的解之间存在着奇点, 导致最终解的存在区间不是连通集, 而连通性在我们这门课中一般是对解的存在区间必须的要求.

【例2.1.3】$\sec^2 x \tan y \mathrm{d}x + \sec^2 y \tan x \mathrm{d}y = 0$.

解　留作练习. 参考答案: $\tan x \tan y = C$.

通常来讲, 常数可以取所有实数的时候可以不特别注明, 否则是需要注明的(例如$C \neq 0$).

【例2.1.4】$y' = \sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}}$的每条积分曲线有两条水平渐近线.

证明　$\displaystyle\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt[3]{\eta^2+1}} = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt[3]{\xi^4+1}}$, 令$x \to +\infty$, 右侧收敛迫使左侧收敛. 而当$y \to \infty$时, 左侧发散.
而由被积函数恒正, 得到y随x的单调性, 进而$y(+\infty)$收敛, 故$y = y(+\infty)$为一条水平渐近线.

同理, $y = y(-\infty)$亦是一条水平渐近线. 同样利用y随x的单调性, 这两条水平渐近线并不是同一条. □

【例2.1.5】证明: 第一象限边界上每一点只能引出$y' = \sqrt{\dfrac{\ln(1+y)}{\sin x}}$的一条通过该象限内部的积分曲线.

证明　$\displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\ln(1+\eta)}} = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\sin\xi}}$. 结合考察积分的收敛性易得结论, 留作练习. □

§2.2　齐次方程及其变形

我们称$y' = F(\dfrac{x}{y})$型的方程为一阶齐次方程. 一般使用$y = ux$进行代换. 不过在代换的过程中x一般会出现在分母, 因此要注意考察特解的情况.

【例2.2.1】$y^2+x^2y'=xyy'$.

解 $y'=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$. 设$u=\dfrac{y}{x}$, 则$u'x+u=\dfrac{u^2}{u-1}$. 参考答案: $y=Ce^{\frac{y}{x}}$.

对于$y'=F\left(\dfrac{a_{11}x+a_{12}y+b_1}{a_{21}x+a_{22}y+b_2}\right)$, 如果方程$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+b_1=0\\ a_{21}x+a_{22}y+b_2=0\end{cases}$满秩且解为$(x_0,y_0)$, 则考虑

$$h=x-x_0,\ k=y-y_0$$

有$y'=F\left(\dfrac{a_{11}h+a_{12}k}{a_{21}h+a_{22}k}\right)$, 这是一个齐次方程. 这个过程中也要注意特解的问题, 下面看几个例子.

【例2.2.2】$(2x-4y+6)\mathrm{d}x+(x+y-3)\mathrm{d}y=0$.

解 设$h=x-1,\ k=y-2$, 则$(2h-4k)\mathrm{d}h+(h+k)\mathrm{d}k=0$, 即$\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}h}=\dfrac{4k-2h}{k+h}$.

(经检验, $\mathrm{d}h=0$与$k+h=0$均不是特解. 这个过程是必需的, 不过一般不用写在过程里.)

令$u=\dfrac{k}{h}$, 则$h\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}h}+u=\dfrac{4u-2}{u+1}$. 可以解出$\dfrac{(u-1)^2}{(u-2)^3}=Ch$, 即$(x-y+1)^2=C(2x-y)^3$.

特别地, 经检验, $u=2$, 即$y=2x$是方程的特解.

这道题目中, 特解可以理解为是在$C=\infty$时产生的. 因此令$C=\infty$也是发现特解的一种重要方式.

【例2.2.3】$(2x+y+1)\mathrm{d}x-(4x+2y-3)\mathrm{d}y=0$.

解 这题对应的线性方程组不是满秩的. 然而, 我们只需设$z=2x+y+1$即可, $\dfrac{\mathrm{d}(z-2x-1)}{\mathrm{d}x}=\dfrac{z}{2z-5}$.

参考答案: $2x+y-1=Ce^{2y-x}$.

还有许多题目不需要解方程组算出h, k的代换式, 而是可以利用方程本身的特点观察出来.

【例2.2.4】$(y'+1)\ln\dfrac{y+x}{x+3}=\dfrac{y+x}{x+3}$.

解 设$z=y+x,\ t=x+3$, 则$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\ln\dfrac{z}{t}=\dfrac{z}{t}$. 参考答案: $\ln\dfrac{y+x}{x+3}-1=\dfrac{C}{y+x}$.

【例2.2.5】$y'=\dfrac{y+2}{x+1}+\tan\dfrac{y-2x}{x+1}$.

解 设$k=y+2,\ h=x+1$, 则$\dfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}h}=\dfrac{k}{h}+\tan(\dfrac{k}{h}-2)$. 参考答案: $\sin\dfrac{y-2x}{x+1}=C(x+1)$.

还有一类方程, 可以通过作变换: $x=t^p,\ z=y^q$, 化为齐次方程. 具体使用这个方法的时候, 通常先挑一些容易观察的项, 看看是否能够观察出p和q的关系. 这种方法显然不是万能的, 而很多方程能够看起来让你想到试一试这种办法.

【例2.2.6】$x^3(y'-x)=y^2$.

解 设$y=z^2$. 参考答案: $x^2=(x^2-y)\ln(Cx)$, 特解$y=x^2$.

【例2.2.7】$2x^2y'=y^3+xy$.

解 设$x=t^2$. 参考答案: $x=-y^2\ln(Cx)$, 特解$y=0$.

【例2.2.8】$2x\mathrm{d}y+(x^2y^4+1)y\mathrm{d}x=0$.

解 设$x=t^2,\ y=z^{-1}$. 参考答案: $x^2y^4\ln(Cx^2)=1$, 特解$y=0$和$x=0$.

实际上, 上题只要$p=-2q$即可, 大家可以试着证明一下. 下题同理, 留作练习.

【例2.2.9】$y\mathrm{d}x+x(2xy+1)\mathrm{d}y=0$.

解 设$y=z^{-1}$. 参考答案: $y^2e^{-\frac{1}{xy}}=1$, 特解$y=0$和$x=0$.

【例2.2.10】$\dfrac{2}{3}xyy'=\sqrt{x^6-y^4}+y^2$.

解 想办法将根号齐次化, 因此自然设$x=\sqrt[3]{t},\ y=\sqrt{z}$. 参考答案: $\arcsin\dfrac{y^2}{|x|^3}=\ln(Cx^3)$, 特解$|x|^3=y^2$.

【例2.2.11】设$f(k)$连续, $y=k_0x$是$y'=f(\dfrac{y}{x})$的解. 求证:

(1)若$f'(k_0)<1$, 则任何一个其他的解都不与$y=k_0x$在原点处相切.

(2)若$f'(k_0)>1$, 则有无穷多个解与$y=k_0x$相切.

<u>证明</u> 设$u=\dfrac{y}{x}$, 则$u'x=f(u)-u$. 显然可知$f(k_0)=k_0$. LaTeX本题未完待续.

§2.3 一阶线性方程

我们称$y'+P(x)y=Q(x)$型的方程为一阶线性方程, 如果$Q\equiv 0$, 称它是齐次的. 对于齐次的情况, 我们很容易通过分离变量法求解. 对于非齐次的情况, 我们可以先按照$Q\equiv 0$的情况来解, 之后将解中的常数C换成一个未知函数u, 代入到这个非齐次方程, 将u解出来, 这就是常数变易法. 由此得到线性方程的通解:

$$y(x)=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}x+C\right).$$

对于这个公式的理解应该是: 每个不定积分号表示的是取定某个定积分, 并且前后两个e指数上的不定积分取的是同一个原函数. 不过对于许多一阶线性方程, 我们不一定循规蹈矩地按照如上公式或常数变易法进行, 而可以通过观察进行凑微分.

【例2.3.1】$xy'-2y=2x^4$.

<u>解</u> 可以构造$\left(\dfrac{y}{x^2}\right)'=2x$. 参考答案: $y=x^4+Cx^2$.

【例2.3.2】$(x+y^2)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x$.

<u>解</u> 很多时候, 打破定势思维, 将x看作是y的函数会得到比较好的结果. 参考答案: $x=y^2+Cy$, 特解$y=0$.

【例2.3.3】$(\sin^2 y+x\cot y)y'=1$.

<u>解</u> 并不是说已经有y'的情况下, 你就不可以将x看作是y的函数了. 只要把$\mathrm{d}y=0$的情况单独考虑即可.

参考答案: $x=-\sin y\cos y+C\cos y$.

【例2.3.4】$(2x+y)\mathrm{d}y=y\mathrm{d}x+4\ln y\mathrm{d}y$.

<u>解</u> 并不是说已经有y'的情况下, 你就不可以将x看作是y的函数了. 只要把$\mathrm{d}y=0$的情况单独考虑即可.

本题在积分因子法还会出现. 参考答案: $\dfrac{x}{y^2}+2\ln^2 y-y=C$.

【例2.3.5】证明Gronwall不等式: 如果$y'+a(x)y\leqslant 0$ $(x\geqslant 0)$, 则$y(x)\leqslant y(0)\exp\left\{-\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right\}$.

<u>证明</u> 注意到$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y(x)\exp\left\{\int_0^x a(s)\mathrm{d}s\right\}\right)\leqslant 0$即可. □

§2.4 积分因子法

积分因子法相对灵活许多, 需要根据具体情况具体分析. 对于$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$, 如果$P_y=Q_x$, 称之为恰当方程. 对于任意的恰当方程, 总是存在$\Phi(x,y)$, 使得

$$\mathrm{d}\Phi(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

因此$\Phi(x,y)=C$即为恰当方程的通积分. 如果它不是恰当方程, 那我们通过取恰当的积分因子μ, 使

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=0$$

成为一个恰当方程, 这种方法就是积分因子法.

【例2.4.1】$(y\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+y^2)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x+2xy)\mathrm{d}y=0$.

<u>解</u> 经检验, $P_y=Q_x=\mathrm{e}^x+2y$, 因此它已经是恰当方程了. 因此

$$\Phi_x=y\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+y^2\ \Rightarrow\ \Phi(x,y)=y\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+xy^2+f(y).$$

代入$\Phi_y = \mathrm{e}^x + 2xy$, 有: $f'(y) = 0$, 因此通积分为$y\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + xy^2 = C$.

【例2.4.2】$(2x+y)\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x + 4\ln y\mathrm{d}y$.

解 本题使用分组积分法: $y^2\mathrm{d}x - 2xy\mathrm{d}y + 4y\ln y\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}y = 0$, 即$\mathrm{d}(\frac{x}{y^2}) + 4\frac{\ln y}{y^3}\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = 0$.

因此两侧积分, 有: $\frac{x}{y^2} - \frac{2\ln y + 1}{y^2} + \frac{1}{y} = C$. 经检验, $y = 0$不是特解.

上述分组积分法的关键在于, 某些项只含有其中一个变量, 因此只要选取只含该变量的积分因子, 使得其余部分可化为全微分, 那么整个方程就化为了恰当方程.

【例2.4.3】$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$.

解 $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x$. 积分因子是$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. 参考答案: $y^2 = 2Cx + C^2$.

本题当然可以使用齐次方程的做法, 但是会比积分因子繁杂许多. 这道题的积分因子是比较常规的形式, 因此可以直接看出来. 许多常见的形式有:

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy) \qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{d}(\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \mathrm{d}(\arctan\frac{x}{y}) \qquad \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(x^2+y^2)$$

【例2.4.4】$\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} + \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = 0$.

解 参考答案: $\sqrt{1+x^2+y^2} + \arctan\frac{x}{y} = C$.

【例2.4.5】$(2xy^2 - y)\mathrm{d}x + (y^2 + x + y)\mathrm{d}y = 0$.

解 容易观察, 只要除以y^2就能处理好$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$. 参考答案: $x^2 - \frac{x}{y} + y + \ln|y| = C$, 特解$y = 0$.

【例2.4.6】$\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x} + 1\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} - \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y} + \frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = 0$.

解 直接分组积分. 参考答案: $\cos\frac{x}{y} - \sin\frac{y}{x} - x + \frac{1}{y} = C$.

【例2.4.7】$(x - y^2)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y = 0$.

解 容易观察, 只要除以x^2就能处理好$2xy\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x$. 参考答案: $x\ln|x| + y^2 = Cx$, 特解$x = 0$.

而很多积分因子是很难直接看出来的, 如果直接考察$(\mu P)_y = (\mu Q)_x$是更加困难的问题. 但是, 我们可以假定μ只与一个变量有关, 此时, 这个偏微分方程就能够化简比较简单的形式, 不过这需要这个偏微分方程只含有你假定有关的那个变量, 不然这个操作还是行不通的.

【例2.4.8】$(x^2y^2 - 1)\mathrm{d}y + 2xy^3\mathrm{d}x = 0$.

解 $(x^2y^2-1)\mu_x - 2xy^3\mu_y - 4xy^2\mu = 0$. 因此可以假设$\mu$与$x$无关, 则$y\mu_y + 2\mu = 0$, $\mu(y) = -y^{-2}$.

参考答案: $x^2y^2 + 1 = Cy$, 特解$y = 0$.

【例2.4.9】$y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}x + (y - x\mathrm{e}^{\frac{x}{y}})\mathrm{d}y = 0$.

解 积分因子: $\mu = y^{-2}$. 参考答案: $\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} + \ln|y| = C$.

【例2.4.10】若方程$\mathrm{d}y - f(x,y)\mathrm{d}x = 0$有只依赖于$x$的积分因子, 试证它一定是线性方程.

证明 $\mu_x + f_y\mu = 0$, 因此f_y与y无关, 故f是y的线性函数. □

这道证明题揭示了一个令人失望的观点: 凡是积分因子只与一个变量有关的, 都可以化为线性方程求解. 不过积分因子法处理线性方程是有它的价值所在的, 因为这种方法可以让我们方便地算出积分因子, 而避免了常数变易法的复杂运算. 在2.9节会有几个较难的例题.

§2.5 因变量可解出型

我们研究$y=f(p,x)$型方程. 这种方程可以考虑对两侧求导: $p=f_1'(p,x)p'+f_2'(p,x)$. 虽然这样不一定总可以让我们能够得到答案, 但是给出了一种可行的方法. 唯一需要注意的是, 这样操作会使方程变为二阶, 从而会导致多出一个常数, 因此最终要注意检查并排除增根.

【例2.5.1】$y=x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$.

解 两侧对x求导得: $(x+2p)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$. 因此$p=-\dfrac{x}{2}$或$p=C$. 分别代入原方程, 有:

$$y=-\frac{x^2}{4}\text{或}y=Cx+C^2.$$

【例2.5.2】$2y=p^2+4px+2x^2$.

解 本题可以使用上述常规做法进行, 不过可以有如下观察:

$$2(y+x^2)=(p+2x)^2=((y+x^2)')^2.$$

参考答案: $y=-\dfrac{x^2}{2}+Cx+\dfrac{1}{2}C^2$, 特解$y=-x^2$.

【例2.5.3】$y=px\ln x+(xp)^2$.

解 两侧对x求导得: $(p+xp')(\ln x+2xp)=0$, 因此$xp=C$或$px=-\dfrac{\ln x}{2}$.

这时直接将xp整体代入即可: $y=C\ln x+C^2$, 特解$y=-\dfrac{1}{4}\ln^2 x$.

【例2.5.4】$2xp=2\tan y+p^3\cos^2 y$.

解 注意到$2xp\cos y=2\sin y+(p\cos y)^3$, 且$(\sin y)'=p\cos y$, 因此设$u=\sin y$, 故$u=xu'-\dfrac{1}{2}(u')^3$.

两侧对x求导: $u'=xu''+u'-\dfrac{3}{2}(u')^2u''\ \Rightarrow\ (x-\dfrac{3}{2}(u')^2)u''=0$. 如果$u'=C$, 则$u=Cx-C^3$.

如果$(x-\dfrac{3}{2}u'^2)=0$, 则$u=\left(\dfrac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$. 参考答案: $\sin y=Cx-C^3$, 特解$x=\dfrac{3}{2}\sin^{\frac{2}{3}}y$.

§2.6 参数变换法

参数变换, 指的是根据方程的具体形式, 将x,y,p中的二者进行参数变换, 从而能够解出x,y关于参数的关系, 这样就得到了解的一个参数表示.

【例2.6.1】$x^2-3p^2=1$.

解 设$x=\cosh t$, $p=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sinh t$. 则$p=\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$可得: $y'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sinh^2 t$.

参考答案: $x=\cosh t$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{1}{4}\sinh 2t-\dfrac{t}{2}\right)+C$.

上述使用双曲三角函数变换, 是因为一般在积分中遇到这种形式, 使用tan和sec变换的计算更复杂.

【例2.6.2】$p^2+y-x^2=0$.

解 先使用直接求导法: $p=2x-2pp'$, 即$p'=\dfrac{x}{p}-\dfrac{1}{2}$. 设$u=\dfrac{x}{p}-\dfrac{1}{2}$, 则 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=(u+\dfrac{1}{2})(1-\dfrac{1}{2}u-u^2)$.

参考答案: $\begin{cases}y=x^2-p^2,\\(p-\alpha x)^\alpha=C(p-\beta x)^\beta.\end{cases}$ 其中$\begin{cases}\alpha=\dfrac{\sqrt{17}-1}{4},\\\beta=-\dfrac{\sqrt{17}+1}{4}.\end{cases}$ 特解$y=\dfrac{1}{2}\alpha x^2$和$y=\dfrac{1}{2}\beta x^2$.

【例2.6.3】$x^3+p^3=4xp$.

解 置$p=xt$. 参考答案: $x=\dfrac{4t}{1+t^3}$, $y=-\dfrac{8}{(1+t^3)^2}+\dfrac{32}{3}\dfrac{1}{1+t^3}+C$.

§2.7 三种著名的方程

1. Bernoulli方程: $y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha}$, $\alpha\neq 0,\ 1$.

考虑初等变换法: $z=y^{1-\alpha}$, 则$z'+(1-\alpha)p(x)z=(1-\alpha)q(x)$.

事实上, Bernoulli方程之所以排除$\alpha=0,\ 1$的情况, 是因为它们正对应着非齐次、齐次线性方程.

【例2.7.1】$y'=x^3y^3-xy$.

解 设$z=y^{-2}$, 则$z'=2xz-2x^3$. 参考答案: $y=(C\mathrm{e}^{x^2}+x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$, 特解$y=0$.

【例2.7.2】$x\mathrm{d}y-\big(y+xy^3(1+\ln x)\big)\,\mathrm{d}x=0$.

解 参考答案: $y=\left(Cx^{-2}-\dfrac{4}{9}x-\dfrac{2}{3}x\ln x\right)^{-\frac{1}{2}}$, 特解$y=0$.

【例2.7.3】$y'=\dfrac{1}{x^2}(\mathrm{e}^y+3x)$.

解 设$u=\mathrm{e}^y$, 则$u'=\dfrac{3u}{x}+\dfrac{u^2}{x^2}$. 参考答案: $y=\ln\left(\dfrac{2x^3}{C-x^2}\right)$.

【例2.7.4】$y'=\dfrac{1}{x^2\sin y-xy}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-yx+\sin y\cdot x^2$. 参考答案: $x=\exp\left\{-\dfrac{y^2}{2}\right\}\left(C-\displaystyle\int_0^y\exp\left\{-\dfrac{\eta^2}{2}\right\}\sin\eta\mathrm{d}\eta\right)^{-1}$.

2. Riccati方程: $y'=p(x)y^2+q(x)y+r(x)$.

Riccati方程是最简单的一阶拟线性方程, 然而在一般情况下, 它是无法通过初等积分法求解的. 如果我们知道它的一个特解$y_1(x)$, 那么设$z(x)=y(x)-y_1(x)$, 代入方程得到一个Bernoulli方程:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=[2p(x)\varphi_1(x)+q(x)]z+p(x)z^2.$$

【例2.7.5】$y'=-y^2-\dfrac{1}{4x^2}$.

解 观察得: $y=\dfrac{1}{2x}$为一个特解, 因此设$z=y+\dfrac{1}{2x}$, 代入有: $z'=-z^2-\dfrac{z}{x}$.

参考答案: $y=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{Cx+x\ln|x|}$, 特解$y=\dfrac{1}{2x}$.

【例2.7.6】$x^2y'=x^2y^2+xy+1$.

解 这个同样可以观察出特解为 $y=-\dfrac{1}{x}$. 此处介绍不需要观察的方法: 设$u=xy$, 则

$$u'x-u=u^2+u+1\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}u}{(u+1)^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

参考答案: $y=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{Cx-x\ln|x|}$, 特解$xy=-1$.

【例2.7.7】$x^2(y'+y^2)+4xy+2=0$.

解 参考答案: $y=\dfrac{1}{x+C}-\dfrac{2}{x}$, 特解$y=-\dfrac{2}{x}$.

【例2.7.8】$(x^2\ln x-1)y'=2xy^2-(2x\ln x-x)y-\dfrac{1}{x}$.

解 参考答案: $y=\ln x+\dfrac{x^2\ln x-1}{C-x^2}$, 特解$y=\ln x$.

【例2.7.9】$xy'+y^2-y=9x^2$.

解 参考答案: $y=\dfrac{6x}{C\mathrm{e}^{6x}-1}+3x$, 特解$y=3x$.

3. Clairaut方程: $y=xp+f(p)$, 其中$f''(p)\neq 0$.

可以使用直接微分法: $[x+f'(p)]\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=0$. 容易得到通解为$y=Cx+f(C)$, 特解

$$\begin{cases}x=-f'(p),\\ y=-f'(p)p+f(p).\end{cases}\qquad (p\text{为参数}).$$

之所以Clairaut方程可以如此得到解, 是因为xp对x求导会出现p, 正好与左侧y的导数p消掉, 而另一项产生的p'直接和$f(p)$产生的p'相同, 进而可以因式分解.

【例2.7.10】$xp^2-2yp+9x=0$.

解　参考答案: $y=\dfrac{9}{2C}+\dfrac{C}{2}x^2$, 特解$y=\pm 3x$.

【例2.7.11】$y=xp+p+p^2$.

解　参考答案:$y=Cx+C+C^2$, 特解$y=-\dfrac{1}{4}(1+x)^2$.

§2.8　综合例题

本节作为综合性的总结, 给出一些综合利用上述方法的题目, 或者是需要用到超脱上述方法的技巧的习题. 它们大都要求具有良好的观察力, 因此, 本节习题的难度要大于之前的习题.

【例2.8.1】$y'^3+y^2=yy'(y'+1)$.

解　$(y'^2-y)(y'-y)=0$. 参考答案: $y=\dfrac{(x+C)^2}{4}$和$y=C\mathrm{e}^x$.

【例2.8.2】$xy'+y=y(\ln x+\ln y)$.

解　$(xy)'=y\ln(xy)$. 参考答案: $xy=\mathrm{e}^{Cx}$, $x>0$.

【例2.8.3】$y'=1+\mathrm{e}^{x+2y}$.

解　设$z=x+2y$, 则$z'=1+2y'=3+2\mathrm{e}^z$, 因此$(\mathrm{e}^{-z})'=-3\mathrm{e}^{-z}-2$. 参考答案: $\mathrm{e}^{-2y}=C\mathrm{e}^{-2x}-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^x$.

【例2.8.4】$y'=\dfrac{x-y^2}{2y(x+y^2)}$.

解　设$u=y^2$, 可化为齐次方程. 参考答案: $y^4+2xy^2-x^2=C\neq 0$.

【例2.8.5】$y'(x^2+y^2+3)=2x\left(2y-\dfrac{x^2}{y}\right)$.

解　设$t=x^2$, $u=y^2$, 可化为齐次方程. 参考答案: $(y^2-2x^2-3)^3=C(y^2-x^2-1)^2$, $C\neq 0$.

【例2.8.6】$y=xp^2+p^3$.

解　$p=p^2+2xpp'+3p^2p'$, 即$p=0$或$(p-1)\mathrm{d}x+(2x+3p)\mathrm{d}p=0$, 后者积分因子为$(p-1)$.

参考答案: $x=\dfrac{1}{(1-p)^2}\left(C+\dfrac{3}{2}p^2-p^3\right)$, $y=\dfrac{p^2}{(1-p)^2}\left(C+\dfrac{3}{2}p^2-p^3\right)+p^3$, 特解$y=0$和$y=x+1$.

【例2.8.7】$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{1+xy^3}{1+x^3y}=0$.

解　观察到第二项分式的分子分母具有某种对称性, 因此想到: $u=x^2y^2$, $v=\dfrac{y}{x}$.

$\therefore x=\sqrt[4]{uv^{-2}}$, $y=\sqrt[4]{uv^2}$. 把它们带入方程, 有: $\dfrac{\dfrac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}v^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u+\dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{4}}v^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}v}{\dfrac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}v^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u-\dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{4}}v^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}v}=-\dfrac{1+uv}{1+\dfrac{u}{v}}$. 化简得:

$$v(1+u)(1+v)\mathrm{d}u=2u(1-u)(1-v)\mathrm{d}v.$$

参考答案: $x^2y^2-1=C(x+y)^2$, 特解$y=-x$.

第3讲　微分方程组与高阶方程

对于高阶拟线性方程$y^{(n)}=f(x,y_1,\cdots,y^{(n-1)})$, 置$y_k=y^{(k-1)}$, 则

$$\begin{cases} y_i'=y_{i+1}\ (\forall 1\leqslant i\leqslant n-1), \\ y_n'=f(x,y_1,\cdots,y_n). \end{cases}$$

由此可见, 高阶拟线性方程一定可以转化为最高阶数为1的常微分方程组. 因此, 这两种方程放在一起研究. 本讲讨论的最一般的方程是高阶拟线性方程.

§3.1　常系数线性微分方程

定义如下形式的微分方程为n阶常系数线性微分方程:

$$\sum_{j=0}^{n}a_j\frac{\mathrm{d}^jy}{\mathrm{d}x^j}=0,\ a_n\neq 0,\ a_j\in\mathbb{R}.$$

记$\mathrm{D}y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 即"D"为微分算子. $\mathrm{D}^ny:=\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$. 设$P(\lambda)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}a_j\lambda^j$为$\lambda$的多项式, 定义$P(\mathrm{D})y:=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}a_j\mathrm{D}^jy$. 对于有理函数具有类似的定义, 不过我们对于$\dfrac{1}{\mathrm{D}}$理解为积分(只取某一特解, 而并不具有一般不定积分的常数C). 显然, $\forall P(\lambda),Q(\lambda)\in\mathbb{R}[\lambda]$, $\deg P=m$, $\deg Q=n$, $y\in C^{mn}(\mathbb{R})$, 则$P(\mathrm{D})Q(\mathrm{D})y=Q(\mathrm{D})P(\mathrm{D})y$. 除此之外, 微分算子还具有许多好的性质, 使得我们能用其方便地求得到方程的一个特解:

定理3.1 *设P是有理函数, 则:*

(1)$P(\mathrm{D})(\mathrm{e}^{ax})=P(a)\mathrm{e}^{ax}$, 如果$P(a)$的分母不为0;

(2)$P(\mathrm{D})(\mathrm{e}^{ax}y(x))=\mathrm{e}^{ax}P(\mathrm{D}+a)(y(x))$;

(3)$P(\mathrm{D}^2)(\sin\omega x)=P(-\omega^2)\sin\omega x$; $P(\mathrm{D}^2)(\cos\omega x)=P(-\omega^2)\cos\omega x$.

【例3.1.1】求$P(\mathrm{D})y=\sin\omega x$的特解.

解　*存在P_0,Q_0为多项式, 使得$P(\mathrm{D})=\dfrac{P_0(\mathrm{D})}{Q_0(\mathrm{D})}$, 故$P_0(\mathrm{D})y=Q_0(\mathrm{D})\sin\omega x$.*

存在P_1,P_2,Q_1,Q_2为多项式, 使得$P_0(\mathrm{D})=P_1(\mathrm{D}^2)+\mathrm{D}P_2(\mathrm{D}^2)$, $Q_0(\mathrm{D})=Q_1(\mathrm{D}^2)+\mathrm{D}Q_2(\mathrm{D}^2)$.

$$\therefore(P_1(\mathrm{D}^2)-\mathrm{D}^2P_2(\mathrm{D}^2))Q_0(\mathrm{D})(\sin\omega x)=(P_1^2(\mathrm{D}^2)-\mathrm{D}^2P_2^2(\mathrm{D}^2))(y).$$

$$\therefore y=\frac{(P_1(-\omega^2)Q_1(-\omega^2)+\omega^2P_2(-\omega^2)Q_2(-\omega^2))\sin\omega x+(P_1(-\omega^2)Q_2(-\omega^2)+P_2(-\omega^2)Q_1(-\omega^2))\cos\omega x}{P_1^2(-\omega^2)+\omega^2P_2^2(-\omega^2)}.$$

【例3.1.2】求$y^{(5)}+y=\mathrm{e}^x$的特解.

解　$y(x)=\dfrac{1}{\mathrm{D}^5+1}\mathrm{e}^x=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x$.

【例3.1.3】求$y''+y'=\sin x$的特解.

解　$y(x)=\dfrac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}\sin x=\dfrac{\mathrm{D}^2-\mathrm{D}}{\mathrm{D}^4-\mathrm{D}^2}\sin x=-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x$.

【例3.1.4】计算$y''+y=x\mathrm{e}^x\sin x$的一个特解.

<u>解</u> 考察$y''+y=x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}$, 则

$$y(x)=\frac{1}{\mathrm{D}^2+1}(x\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x})=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\frac{1}{1+(\mathrm{D}+1+\mathrm{i})^2}x=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\frac{1}{(1+2\mathrm{i})\left(1+\dfrac{2+2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\mathrm{D}+\dfrac{1}{1+2\mathrm{i}}\mathrm{D}^2\right)}x$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}}{1+2\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{6-2\mathrm{i}}{5}\mathrm{D}-\frac{1-2\mathrm{i}}{5}\mathrm{D}^2\right)^n x=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}\left(\frac{1-2\mathrm{i}}{5}x+\frac{-2+14\mathrm{i}}{25}\right)$$

$\therefore y(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{25}[(14-10x)\cos x+(-2+5x)\sin x]$为一个特解.

对于常系数微分方程, 在知道特解的情况下, 可以根据以下两个定理求得通解:

<u>**定理3.1**</u> 设P为实多项式, $P(r)=0$具有s_j重根r_j, $1\leqslant j\leqslant t$, 则齐次方程$P(\mathrm{D})y=0$具有复通解:

$$y=\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{s_j}C_k^{(j)}x^{k-1}\right)\mathrm{e}^{r_jx},\ C_k^{(j)}\text{为常数.}$$

<u>**定理3.2**</u> (线性常微分方程解的结构定理)对任意的非齐次线性常微分方程, 它的通解为对应齐次线性方程的通解加上非齐次方程的一个特解.

结构定理对于任意的线性方程都是适用的, 而无需常系数. 不过我们只有在常系数的情况下, 才能使用定理3.1求通解、用微分算子法求特解. 定理3.1中的$P(r)=0$称为微分方程$P(D)y=f(x)$的特征方程, r_j称为s_j重特征根. 因P是实多项式, 故复特征根必定是成对出现的, 因此$C_1\mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})x}+C_2\mathrm{e}^{(\alpha-\beta\mathrm{i})x}$这一项复通解对应的实通解不难验证为: $\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$. 使用这个规律就可以将复通解部分变为实通解.

【例3.1.5】求$y'''-y'=x$的通解.

<u>解</u> 特解$y(x)=\dfrac{1}{\mathrm{D}(\mathrm{D}^2-1)}(x)=-\dfrac{1}{\mathrm{D}}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{D}^{2n}x=-\dfrac{1}{\mathrm{D}}x=-\dfrac{x^2}{2}$, 特征根$r_1=0,\ r_2=1,\ r_3=-1$.

故通解为$y(x)=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{x^2}{2}$.

【例3.1.6】求$(\mathrm{D}^2+1)y=\sin x$的通解.

<u>解</u> 注意到本题无法直接套用公式(因为$-1+1=0$), 故考虑$(\mathrm{D}^2+1)y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$,

$$y(x)=\frac{1}{\mathrm{D}^2+1}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1}{(\mathrm{D}+\mathrm{i})^2+1}(1)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1}{\mathrm{D}(\mathrm{D}+2\mathrm{i})}(1)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1}{2\mathrm{i}\mathrm{D}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}\mathrm{D}}{2}\right)^n(1)=\frac{x}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

$\therefore y(x)=\operatorname{Im}\dfrac{x}{2\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=-\dfrac{x}{2}\cos x$为一个特解. 特征根为$\pm\mathrm{i}$, 故通解为$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{x}{2}\cos x$.

【例3.1.7】$y^{(4)}-4y'''+6y''-4y'+y=(x+1)\mathrm{e}^x$.

<u>解</u> $y(x)=\dfrac{1}{(\mathrm{D}-1)^4}(x+1)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\dfrac{1}{\mathrm{D}^4}(x+1)=\mathrm{e}^x\left(\dfrac{1}{120}x^5+\dfrac{1}{24}x^4\right)$.

$\therefore y(x)=\left(C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^3+\dfrac{1}{24}x^4+\dfrac{1}{120}x^5\right)\mathrm{e}^x$为通解.

【例3.1.8】$3y''+12y=2\sin^2 x$.

<u>解</u> $$y(x)=\frac{1}{3(\mathrm{D}^2+4)}(1-\cos 2x)=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\mathrm{D}^2}{4}\right)^n(1)-\frac{1}{\mathrm{D}^2+4}\operatorname{Re}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right]=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\frac{1}{(2\mathrm{i}+\mathrm{D})^2+4}(1)\right)$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\operatorname{Re}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\frac{1}{\mathrm{D}(1+4\mathrm{i}\mathrm{D})}(1)\right)=\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\operatorname{Re}\left(\frac{x}{4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\right)=\frac{1}{12}(1-x\sin x)$$

$\therefore$通解为$y(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\dfrac{1-x\sin 2x}{12}$.

§3.2 常系数线性微分方程组

本节默认$\vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)^T$, $\vec{C}=(C_1,\cdots,C_n)^T$, A为系数矩阵, $\vec{f}(t)$为非齐次项.

考察常系数线性微分方程组: $\dfrac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A\vec{y}+\vec{f},\ A\in\mathbb{R}^{n\times n},\ \vec{y}=(y_1,\cdots,y_n)^T$. 类似一阶常系数方程, 它的

齐次方程具有通解: $\vec{y}=\mathrm{e}^{xA}\vec{C}$, 其中$\vec{C}$为$n$维常列向量, 之后依旧有常数变易法. 事实上, 这个方法是理论上的结论, 求解常系数线性微分方程组一般是不会使用这种方法的, 下面通过若干例题来看.

【例3.2.1】$\vec{y}'=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\vec{y}$.

解 $y_3=C_3\mathrm{e}^{-4x}$, $y_2=C_2\mathrm{e}^{-x}$, 把y_2代入第一行: $y_1'+y_1=C_2\mathrm{e}^{-x}$, 故

$$C_2\frac{1}{\mathrm{D}+1}(\mathrm{e}^{-x})=C_2\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{\mathrm{D}-1+1}(1)=C_2x\mathrm{e}^{-x}$$

为y_1的一个特解. 参考答案: $\vec{y}=C_1\mathrm{e}^{-x}(1,0,0)^T+C_2\mathrm{e}^{-x}(x,1,0)^T+C_3\mathrm{e}^{-4x}(0,0,1)^T$.

【例3.2.2】$\vec{y}'=\begin{pmatrix}0&a\\-a&0\end{pmatrix}\vec{y}$.

解 $y_1''=ay_2'=-a^2y_1$, 故$y_1=C_1\cos ax+C_2\sin ax$, $y_2=-C_1\sin ax+C_2\cos ax$.

【例3.2.3】$\vec{y}'=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\vec{y}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

解 $y_2=C_2\mathrm{e}^{2x}$, 故$y_1'-2y_1=C_2\mathrm{e}^{2x}$. y_1的一个特解为$\dfrac{C_2}{\mathrm{D}-2}(\mathrm{e}^{2x})=C_2\mathrm{e}^{2x}\dfrac{1}{\mathrm{D}}(1)=C_2x\mathrm{e}^{2x}$.

参考答案: $\vec{y}=C_1\mathrm{e}^{2x}(1,0)^T+C_2\mathrm{e}^{2x}(x,1)^T$.

由此可见, 如果我们能够将方程的一部分转化为高阶线性方程求解(例如准三角型、反对角型、类置换阵等), 我们可以将这一部分先化为高阶线性方程, 然后使用3.1节的方法求出$\vec{y}$的若干分量, 这样可以将其余难以处理的分量对应的系数矩阵降阶.

对于不容易转化为高阶方程求解的方程, 我们需要计算其系数矩阵的特征值及其对应的特征向量, 来确定最终的通解. 具体的操作方法通过以下几个例子给出. 首先看特征根均为单根的情况.

【例3.2.4】$\vec{y}'=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}\vec{y}$.

解 A的特征值为7和-2, 它们对应的特征向量分别是$(1,1)^T$和$(-4,5)^T$.

参考答案: $\vec{y}=C_1\mathrm{e}^{7x}(1,1)^T+C_2\mathrm{e}^{-2x}(-4,5)^T$.

当A存在重特征根时, 该如何处理呢？请看以下例题.

【例3.2.5】$\vec{y}'=\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}\vec{y}$.

解 $\varphi_A(\lambda)=(\lambda-1)^3$. 考察$A-I=\begin{pmatrix}0&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$, $(A-I)^2=O$. 容易得到一对Jordan分解:

$$P=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-1&3\\0&-1&0\end{pmatrix},\ J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

因此$\vec{y}=C_1\mathrm{e}^x(1,0,0)^T+C_2\mathrm{e}^x(2,-1,-1)^T+C_3\mathrm{e}^x((2,-1,-1)^Tx+(0,3,0)^T)$是一个特解.

参考答案: $C_1\mathrm{e}^x(1,0,0)^T+C_2\mathrm{e}^x(0,1,1)^T+C_3\mathrm{e}^x(2x,3-x,-x)^T$.

【例3.2.6】$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$.

<u>解</u> A的Jordan分解: $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \mathrm{diag}(-2, 2, 2, 2)$.

参考答案: $\vec{y} = C_1 \mathrm{e}^{-2x}(-1,1,1,1)^T + C_2\mathrm{e}^{2x}(1,0,0,1) + C_3\mathrm{e}^{2x}(1,0,1,0) + C_4\mathrm{e}^{2x}(1,1,0,0)$.

因此, 对于具有重根的情况, 我们需要考虑它的Jordan标准形中的Jordan块情况, 即矩阵A的根子空间是什么样的. 它的通解正是由如下形式的特解线性组合而成的:

$$\mathrm{e}^{\lambda_i x}\left(\sum_{j=0}^{n_j-1} \frac{x^j}{j!}\vec{r}_{n_j-1-j}\right)\ (1 \leqslant n_j \leqslant s_j,\ s_j\text{为该Jordan块的阶数},\ 0 \leftarrow \vec{r}_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \vec{r}_{s_j-1}\text{是根向量链}).$$

下面看几个非齐次方程的初值例题. 上节介绍的微分算子法在某些特殊情况下依旧可以比较方便地使用, 对于较一般的情况, 使用起来没有这么方便. 因此, 将特殊情况罗列于此:

1. $\vec{f}$是多项式的时候, 此时若A可逆, 则$\dfrac{1}{\mathrm{D}-A}(\vec{f}(x)) = -A^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^{-n}\mathrm{D}^n\vec{f}(x)$.
2. $\vec{f}$各个分量是周期相同的三角函数时, $\dfrac{1}{\mathrm{D}-A}(\vec{f}(x)) = \dfrac{\mathrm{D}+A}{\mathrm{D}^2-A^2}(\vec{f}(x)) = \dfrac{\mathrm{D}+A}{-n^2I-A^2}\vec{f}(x)$.
3. $\dfrac{1}{\mathrm{D}-A}\mathrm{e}^{ax}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = (aI-A)^{-1}\mathrm{e}^{ax}\begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, 其中$a \notin \lambda(A)$.

【例3.2.7】$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -n^2 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix}\vec{y} + \begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix}$ $(n \neq 0)$.

<u>解</u> 齐次方程的通解为$\vec{y} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{n^2x} & \mathrm{e}^{-n^2x} \\ -\mathrm{e}^{n^2x} & \mathrm{e}^{-n^2x} \end{pmatrix}\vec{C}$. 考察原方程的特解:

$$\frac{1}{\mathrm{D}-A}(\vec{f}(x)) = \frac{\mathrm{D}+A}{\mathrm{D}^2-A^2}(\vec{f}(x)) = \frac{\mathrm{D}+A}{-n^2I-A^2}\begin{pmatrix} \cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nx \\ \frac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nx \end{pmatrix}$$

参考答案: $\vec{y} = C_1\mathrm{e}^{n^2x}(1,-1)^T + C_2\mathrm{e}^{-n^2x}(1,1)^T + \left(\dfrac{n+1}{n(n^2+1)}\sin nx, \dfrac{n-1}{n(n^2+1)}\cos nx\right)^T$.

【例3.2.8】$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\vec{y} + \begin{pmatrix} 2-x \\ 0 \\ 1-x \end{pmatrix}$.

<u>解</u> 系数矩阵的特征值为1, i, $-$i, 对应的特征向量分别为$(-1,1,0)^T$, $(1,\mathrm{i},1)^T$, $(1,-\mathrm{i},1)^T$.

$\therefore$基解矩阵为$\begin{pmatrix} -\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ \mathrm{e}^x & \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \end{pmatrix}$. 提取后两列各自的实部和虚部, 得到齐次方程的实通解:

$$\vec{y} = C_1\mathrm{e}^x(-1,1,0)^T + C_2(\cos x, -\sin x, \cos x)^T + C_3(\sin x, \cos x, \sin x)^T.$$

使用微分算子法寻找原方程的特解:

$$\frac{1}{\mathrm{D}-A}(\vec{y}(x)) = -A^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}A^{-n}\mathrm{D}^n\begin{pmatrix}2-x\\0\\1-x\end{pmatrix} = -A^{-1}\begin{pmatrix}2-x\\0\\1-x\end{pmatrix} - A^{-2}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\x\\0\end{pmatrix}.$$

参考答案: $\vec{y} = C_1\mathrm{e}^x(-1,1,0)^T + C_2(\cos x, -\sin x, \cos x)^T + C_3(\sin x, \cos x, \sin x)^T + (-1,x,0)^T$.

第4讲　一阶拟线性常微分方程定性理论初步

我们称对于最高阶导数本身是线性的方程为拟线性方程(或半线性方程). 本章研究一阶拟线性常微分方程:

$$y' = f(x,y),\ f \in C(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^2\text{为区域}$$

的简单的定性理论: 解的存在性、唯一性、最大存在区间等问题.

§4.1　常微分方程的几何含义

若$y = \varphi(x)$为$y' = f(x,y)$的一个解, 则称$\Gamma : y = \varphi(x)$为微分方程的一条积分曲线. 对于$P_0(x_0, y_0) \in \Gamma$, P_0处切线为$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$. 因此我们称区域$G$内每个点$P_0(x_0, y_0)$处的切线为微分方程在$P_0$处的线素. 称$G$上所有点连同其线素为方向场.

我们称曲线与一个方向场吻合, 如果该曲线上任一点的切线方向与方向场在该点的方向相同, 即该点斜率为$f(x,y)$. 记$L_k : f(x,y) = k$, 称其为方向场的等斜线. 显然, 在L_k上的各点线素的斜率均等于k, 从而通过作出L_k的图像, 有助于我们作积分曲线的图像.

【例4.1.1】$y' = -\dfrac{x}{y}$, $L_k : y = -\dfrac{x}{k}$, 它与其上任一点的线素垂直相交, 因此可大致得到积分曲线为以O为圆心的同心圆.

【例4.1.2】$y' = x^2 + y^2$, $L_k : x^2 + y^2 = k$. 这个例子我们很难画出具体积分曲线的形状, 不过可以知道, 当所取的线素数目越多、划分越精细的时候, 我们越能够得到精确的曲线形状(比如利用计算机), 进而才能观测曲线的性态.

我们考虑将自变量和因变量所在空间联合起来:$(x,y) \in \mathbb{R}^n$, 我们解方程的过程就是在寻找曲线$\gamma_C \subset \mathbb{R}^2$. 一般来讲, γ_C由$\Phi(x,y) = C$的形式给出. 设$\gamma : y = \varphi(x)$为积分曲线, 则$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. 注意到$\gamma$有切向量$T = e_x + \varphi'(x)e_y$, 故$\gamma$为积分曲线$\Leftrightarrow (P(x,y), Q(x,y)) \cdot T = 0 \Leftrightarrow P + Q\varphi' = 0 \Leftrightarrow \varphi' = f(x, \varphi(x))$.

由第三讲序言可见, 高阶方程总是可以化为若干个一阶的微分方程组成的方程组. 这样, 可以将线素等概念推广至高维加以解释对应的几何含义, 具体情况此处不再赘述.

§4.2　解的局部存在唯一性

考虑$y' = 2\sqrt{1-y}$的非常数解: $y = 1 - (x + C)^2\ (x \leqslant -C)$. 但是

$$y = f(x, C) = \begin{cases} 1 - (x+C)^2, & x \leqslant -C \\ 1, & x \geqslant -C \end{cases}$$

满足方程, 因此在$(-C, 1)$处, 方程的解不局部唯一. 这正符合教材习题2-2的第5题:

【例4.1.1】设微分方程$y' = f(y)$, 其中$f(y)$在$y = a$的某邻域($|y - a| \leqslant \varepsilon$)内连续, 而且$f(y) = 0$当且仅当$y = a$,

则在直线$y=a$上的每一点, 方程的解是局部唯一, 当且仅当$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}\right|=\infty$.

证明 ($\Rightarrow$)注意到$y=a$为经过(x_0,a)的一个解, 因此它就是唯一解. 考察过(x_1,ε)的解$\int_y^{a+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\eta}{f(\eta)}=x_1-x$.

由于对任意的$x_0\in\mathbb{R}$, 过(x_0,a)的解唯一, 因此过(x_1,ε)的解不与$y=a$相交, 这迫使

$$\left|\int_a^{a+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}\right|=\left|\lim_{y\to a^+}\int_y^{a+\varepsilon}\frac{\mathrm{d}\eta}{f(\eta)}\right|=\infty.$$

($\Leftarrow$)因为$f(y)=0\Leftrightarrow y=a$, 故存在$0<\delta<\varepsilon$, 使

$$f(y)>0\text{或}f(y)<0\ (\forall y\in(a,a+\delta)\text{或}y\in(a-\delta,a)).$$

利用上述条件, 可以对于$y_0\neq a$的初值(x_0,y_0)的情况直接积分求出唯一解.

对于$y_0=a$的情况, 如果存在除$y=a$以外的另外一解$y=\varphi(x)$, 满足$\varphi(x_0)=a$, 则

$$\infty=\left|\int_a^y\frac{1}{f(\eta)}\mathrm{d}\eta\right|=|x-x_0|<\infty$$

矛盾! 以上充要条件的证明对于$a-\varepsilon$的情况是同理的. □

这里对于上述例子的证明给出两点注记:

(1)$y=a$上局部存在唯一的意思是: 对任意(x_0,a), 存在其邻域U, 使得以U上任一点为初值条件的解该邻域上是唯一的.

(2)事实上, 以上定理有如下加强版, 证明过程完全类似, 留作练习.

【例4.1.2】设微分方程$y'=f(y)g(x)$, 其中$f(y)$在$y=a$的某邻域$(|y-a|\leqslant\varepsilon)$内连续, $g\in C(\mathbb{R})$, 而且$f(y)=0$当且仅当$y=a$, 则在直线$y=a$上的每一点, 方程的解是局部唯一, 当且仅当$\left|\int_a^{a\pm\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}\right|=\infty$. □

我们对比Osgood定理:

定理3.1 (Osgood)设$f(x,y)$在区域G内满足$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant F(|y_1-y_2|)$, 其中$F(r)>0$是$r>0$的连续函数, 瑕积分$\int_0^{r_1}\frac{\mathrm{d}r}{F(t)}=\infty(r_1>0\text{是常数})$, 则微分方程$y'=f(x,y)$在$G$内经过每一点的解都是唯一的.

容易看出,【例4.1.2】的条件只需一个关于f本身的瑕积分发散即可, 而Osgood定理需要找到一个函数F满足Osgood条件, 并验证F的瑕积分发散. 但是另一方面, Osgood条件得到的是整个区域的存在唯一性, 而【例4.1.2】得到的是局部存在唯一性. 因此, 二者的结论互有强弱, 如何灵活使用需要根据题目要求具体分析.

例如, 教材习题3-1的第1题的两个小题均可以方便地使用局部唯一性进行证明的, 如果使用Osgood来进行证明, 虽不一定做不到, 但是会遇到很大的麻烦.

本来这章计划要覆盖所有大家学过的存在性、唯一性、延拓定理、稳定性等知识的, 但是张老师提到他课上讲的已经很全了(个人也认为的确如此), 并且即使写出这部分习题课讲义, 也无外乎是罗列结论、举一些例题, 但是这里的题目不会是考察的重点. 只有李雅普诺夫稳定性中的李雅普诺夫函数的构造需要大家着重掌握, 其余的只需大致了解即可. 也欢迎大家对于这部分问题感兴趣的同学单独找我探讨.

第5讲　一阶拟线性偏微分方程

我们称如下形式的方程为一阶线性偏微分方程:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, x_2, \cdots, x_n)u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n). \tag{5.1}$$

称如下形式的方程为一阶拟线性偏微分方程:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = c(x_1, x_2, \cdots, x_n, u). \tag{5.2}$$

本章主要列出一些计算的实例, 部分结论的证明是省略的, 如有需要, 请自行参考有关文献.

§5.1　一阶线性偏微分方程的求解

我们引入方程5.1的特征方程组:$\dfrac{\mathrm{d}x_i}{b_i} = \dfrac{\mathrm{d}x_j}{b_j}$, $\quad \forall i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$. 如果选定一个变量(例如$x_n$)作为自变量, 特征方程即可变为$(n-1)$个一阶常微分方程: $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}x_n} = \dfrac{b_i}{b_n}$ $(\forall i)$组成的方程组.

定理5.1 若$\varphi_i(x_1, \cdots, x_n) = C_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$是方程5.1的特征方程组独立的首次积分, 作代换:

$$\xi_i = \varphi_i(x_1, \cdots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1; \quad \xi_n = x_n$$

则方程5.1可化为关于ξ_n的一阶常微分方程.

【例5.1.1】$(y+z)u_x + (z+x)u_y + (x+y)u_z = 0$.

解　这是个$c = f = 0$的一阶线性PDE. 其特征方程为: $\dfrac{\mathrm{d}x}{y+z} = \dfrac{\mathrm{d}y}{z+x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{x+y}$.

利用和比、差比公式: $\dfrac{\mathrm{d}(x+y+z)}{2(x+y+z)} = \dfrac{\mathrm{d}(y-x)}{x-y} = \dfrac{\mathrm{d}(z-x)}{x-z}$.

解得: $\dfrac{z-x}{y-x} = C_1$, $(x-y)^2(x+y+z) = C_2$.

参考答案: $u = \varphi\left(\dfrac{z-x}{y-x}, (x-y)^2(x+y+z)\right)$, φ可微.

事实上, 任意$c = f = 0$的一阶线性PDE, 在计算出特征面之后, 均可直接声称答案为如上形式, 无需再通过换元代入进行计算. 这条性质的证明留作练习.

【例5.1.2】$\begin{cases} xu_x + tu_t = cu, \ x \in \mathbb{R}^1, \ t \geqslant 0, \\ u(x, 1) = f(x). \end{cases}$ 　其中c为常数.

解　容易观察特征线: $\dfrac{x}{t} = C$, 换元: $\xi = \dfrac{x}{t}$, $\eta = t$. 则$xu_x + tu_t = \eta u_\eta = cu$, $u = \varphi(\xi)\eta^c = \varphi(\dfrac{x}{t})t^c$.

代入初值条件, 得: $u = f(\dfrac{x}{t})t^c$.

在这道题中, 如果$u(0^+) = u(0)$, 我们能够得到题目要求区域中的完整的解, 我们将其称为整体解. 如果$u(0^+) = \infty$, 例如本题$c > 0$的情况, 我们称解在$t = 0$时刻“爆破”, 整体解不存在. 爆破理论、爆破解的构造是当今PDE的主流研究方向之一.

§5.2 一阶拟线性偏微分方程的求解

考虑构造方程5.2关于φ线性PDE:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+c(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\frac{\partial\varphi}{\partial u}=0. \tag{5.3}$$

定理5.2 若$w=\varphi(x_1,\cdots,x_n,u)$是方程5.3的解, 则$\varphi(x_1,\cdots,x_n,u)=0$是方程5.2的隐式解.

由定理5.2, 结合$c=f=0$的一阶线性PDE的解法, 我们有:

定理5.3 若$\varphi_i(x_1,\cdots,x_n,u)=C_i\ (1\leqslant i\leqslant n)$是方程5.3的特征方程组独立的首次积分, 则

$$g(\varphi_1(x_1,\cdots,x_n,u),\cdots\varphi_n(x_1,\cdots,x_n,u))=0$$

是方程5.2的隐式解.

一般我们称方程5.3的特征方程组为完全特征方程. 特别地, 对于线性PDE, 我们当然可以把它看作特殊的拟线性PDE, 使用定理5.3方便地得到隐式解, 而无需换元代入. 但是, 这只能暂时得到隐式解, 之后还需要考虑显化的过程, 实际上能够证明, 拟线性PDE的隐式解一定是能够显化的, 因此, 对于所有的拟线性方程(包括线性方程), 我们都可以方便地使用定理5.3来计算方程的解.

【例5.1.3】$x^2u_x+y^2u_y=u^2,\ u(x,y)\big|_{y=2x}=1.$

解 完全特征方程: $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$, 故$\varphi(\frac{1}{y}-\frac{1}{x},\frac{1}{u}-\frac{1}{y})=0$为通解, 显化: $\frac{1}{u}=\frac{1}{y}+f(\frac{1}{y}-\frac{1}{x})$.

代入初值条件: $1=\frac{1}{y}+f(-\frac{1}{y})$, 因此$f(x)=1+x$. 参考答案: $u=\frac{xy}{xy+2x-y}$.

【例5.1.4】$\sum_{k=1}^{n} x_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=3u,\ u(x_1,\cdots,x_{n-1},1)=h(x_1,\cdots,x_{n-1}).$

解 完全特征方程: $\frac{\mathrm{d}x_k}{x_k}=\frac{\mathrm{d}u}{3u}\ (\forall 1\leqslant k\leqslant n)$, 所以$u=x_n^3 f(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n})$.

代入初值条件: $u=x_n^3 h(\frac{x_1}{x_n},\cdots,\frac{x_{n-1}}{x_n})$.

§5.3 运输方程与波动方程的d'Alembert公式

通过前面给出的一阶拟线性PDE的解法, 我们研究运输方程:

$$\begin{cases} u_t+a\cdot \mathrm{D}u=f(x,t),\ x\in\mathbb{R}^n,\ a\in\mathbb{R}^n\text{为常向量},\ t\in(0,\infty), \\ u(x,0)=g(x),\ x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5.4}$$

实际上, 它相当于不含有零阶项的常系数一阶PDE, 它对于计算波动方程的d'Alembert公式起到了至关重要的作用. 它的求解公式连同下面的d'Alembert公式的证明一起留作练习.

定理5.4 方程5.4的解为$u(x,t)=g(x-at)+\int_0^t f(x+a(s-t),s)\mathrm{d}s$.

定理5.5 (波动方程的d'Alembert公式)考察一维波动方程:

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=f(x,t),\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{5.5}$$

它的解为$u(x,t)=\frac{1}{2}[\phi(x+ct)+\phi(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{2c}\int_0^t\mathrm{d}s\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)}f(y,s)\mathrm{d}y.$

第6讲　二阶偏微分方程的基本方法

本讲注意研究的对象是二阶线性PDE, 以及少量的半线性PDE. 所谓半线性PDE, 指的是所有的最高阶导数是线性的, 并且其系数中只含有自变量, 因此, 它是一种特殊的拟线性方程.

在本讲, 我们总是设$U \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$是开集, 并且承认Einstein求和约定. 使用u_i表示$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, u_{ij}表示$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$.

§6.1　二阶半线性方程的分类与标准型

设$a^{ij} = a^{ji}$, 考察U上的如下二阶半线性方程:

$$a^{ij}(x)u_{ij} + F(x, u, u_1, \cdots, u_n) = 0. \tag{6.1}$$

$\forall x^0 \in U$, 定义方程6.1的线性主部为$a^{ij}(x^0)u_{ij}$, 对应的二次型为$Q(\xi) = a^{ij}(x^0)\xi_i\xi_j$称为方程6.1的特征型. 考察$Q(\xi)$的相合标准型$Q(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_*^i(x^0)\lambda_i^2$, 其中$a_*^i(x^0) = \pm 1$. 则存在满秩线性变换, 使得原方程化为

$$\sum_{i=1}^{m} a_*^i(x^0)u_{\xi_i\xi_i} + F_*(\xi, u, \mathrm{D}u) = 0,\ m \leqslant n. \tag{6.2}$$

我们称方程6.2为方程6.1在点x^0的标准型. 记P_Q和N_Q分别为Q的正、负惯性指数, 作出如下分类:

(1)若$m = n$, $P_QN_Q = 0$, 称方程在点x^0处是椭圆型的;

(2)若$m = n$, $P_QN_Q = n-1$, 称方程在点x^0处是双曲型的;

(3)若$m = n$, $P_QN_Q > n-1$, 称方程在点x^0处是超双曲型的;

(4)若$m = n-1$, 称方程在点x^0处是抛物型的;

(5)若$m < n-1$, 称方程在点x^0处是广义抛物型的.

下面我们研究只含有两个自变量的情形, 并探讨如何将方程化为标准型. 考察

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{6.3}$$

称$a_{11}\mathrm{d}y^2 - 2a_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + a_{22}\mathrm{d}x^2 = 0$为方程6.3的特征方程, $d = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$为方程6.3的判别式.

定理6.1 在区域U上, 方程6.3是(1)椭圆型$\Leftrightarrow d < 0$; (2)抛物型$\Leftrightarrow d = 0$; (3)双曲型$\Leftrightarrow d > 0$.

【例6.1.1】考察方程$(1-x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (1-y^2)u_{yy} - u_x + u^3 = 0$.

解　判别式$d = x^2 + y^2 - 1$, 因此在单位圆内部是椭圆型, 单位圆上是抛物型, 单位圆外是双曲型.

【例6.1.2】考察方程$u_{xx} + yu_{yy} = 0$.

解　(1)当$y < 0$时, 求解特征方程得到两族特征线: $x + 2\sqrt{-y} = C_1$, $x - 2\sqrt{-y} = C_2$. 换元:

$$\xi = x + 2\sqrt{-y},\ \eta = x - 2\sqrt{-y} \quad \Rightarrow \quad u_{\xi\eta} + \frac{1}{2(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0.$$

得到了双曲型方程的第二标准型. 如果再使用$\xi + \eta$与$\xi - \eta$换元, 可得到方程的第一标准型.

(2)$y = 0$时, 显然是抛物型.

(3)$y>0$时, 考察特征方程: $\mathrm{d}y \pm \mathrm{i}\sqrt{y}\mathrm{d}x = 0$. 求解得其中一个的复通积分: $x+2\mathrm{i}\sqrt{y}=C$.

按照实部、虚部分别换元: $\xi = x,\ \eta = 2\sqrt{y}$, 得到椭圆标准型: $u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\dfrac{1}{\eta}u_\eta = 0$.

【例6.1.3】求解方程$yu_{xx}+(x+y)u_{xy}+xu_{yy}=0\ (x\neq y)$.

<u>解</u>　$d=\dfrac{(x-y)^2}{4}\geqslant 0$. 当$x\neq y$时, 特征线: $\xi := y-x=C_1$和$\eta := y^2-x^2=C_2$. 因此$u_{\xi\eta}+\dfrac{1}{\xi}u_\eta=0$.

解得: $u(x,y)=g(y-x)+\dfrac{1}{y-x}h(y^2-x^2)$.

由此可见, 即使我们能够将方程化为标准形式, 但是通常情况下还是无法继续求解. 有很多时候, 需要我们作出一些观察, 才可能会有机会.

哎, 又一次草草收尾了, 本来这章能写很多内容呢, 但是今天得知由于课时原因, 张老师只讲分离变量法、幂级数方法、Evans的第二章这些内容, 而这些内容正能够分别对应到以下部分:

1. 分离变量法: 参考《数学物理方程》第2、3章有关内容;
2. 幂级数方法: 参考丁同仁的第7章有关内容;
3. Evans的第二章: 仔细阅读以下书上讲过的证明, 掌握几道作业题.

当然, 最主要的还是张老师的课程讲义的内容, 这部分一定要把握住.

若是有缘, 他日重当这门课的助教, 再续! LaTeX

第7讲　调和函数的性质

我们称如下方程为Poisson方程的Dirichlet边界问题(通常简记为D.P.问题):

$$\begin{cases}\Delta u(x)=f(x), & x\in U\\ u(x)=g(x), & x\in\partial U\end{cases}$$

其中$\Delta=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}$为Laplace算子. 这是最简单的一种线性椭圆方程, 如果非齐次项$f(x)=0$, 这个方程退化为Laplace方程, 它的解函数被称为U上的调和函数.

§7.1　调和函数与平均值性质

本小节探讨一般的调和函数理论, 记ω_n为n维单位球的表面积, 即

$$\omega_n=\mathcal{H}^{n-1}\big(\partial B_1(0)\big)=\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)},\ \text{其中}\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\text{为Euler第二积分}.$$

定义多重指标: $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n$, $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$, $\alpha!=\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i!$.

设$x=(x_1,\cdots,x_n)$, 定义$x^\alpha=\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}$, $\mathrm{D}^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1\cdots\partial^{\alpha_n}x_n}$.

定义7.1 称$u\in C(U)$满足平均值性质(mean value property, 记作$u\in$M.V.P.(U)), 如果满足:

$$u(x)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int\limits_{\partial B_r(x)}u(y)\mathrm{d}S_y\ (\forall B_r(x)\subset U)\ \text{或}\ u(x)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int\limits_{B_r(x)}u(y)\mathrm{d}y\ (\forall B_r(x)\subset U).$$

定义7.1的两个条件的等价性的证明是平凡的, 留作练习.

定理7.2 (最大模原理)设$u\in C(\overline{U})\cap$M.V.P.(U), 且u不是常数, 则u的最大值和最小值均只能在∂U上取得. 进而有$\max\limits_{\overline{U}}|u|=\max\limits_{\partial U}|u|$.

证明　仅对最大值情况做出证明. 置$\Sigma=\{x\in U:u(x)=\max\limits_{\overline{U}}u\}$. 显然$\Sigma$是闭集.

$\forall x\in\Sigma$, 取$r>0$, 使$B_r(x)\subset U$, 记$M=\max\limits_{\overline{U}}u$, 由平均值性质:

$$M=u(x_0)=\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x_0)}u(y)\mathrm{d}y\leqslant\frac{n}{\omega_n r^n}\int_{B_r(x_0)}M\mathrm{d}y=M$$

由u的连续性, $u(y)\equiv M$ $(\forall y\in B_r(x_0))$, 即$B_r(x_0)\subset\Sigma$, Σ是开集. 故$\Sigma=\varnothing$或$\Sigma=U$. □

定理7.3 $u\in C(U)\cap$M.V.P.(U)当且仅当$\Delta u(x)=0$ $(\forall x\in U)$, 并且调和函数一定光滑.

证明　(充分性) 取$B_r(x)\subset U$, $\rho\in(0,r)$. 记$B_\rho=B_\rho(x)$. 由Gauss散度定理:

$$0=\int_{B_\rho}\Delta u(y)\mathrm{d}y=\int_{\partial B_\rho}\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_{|w|=1}u(x+\rho w)\mathrm{d}S_w.$$

约掉ρ^{n-1}, 并对ρ从0到r积分, 有: $\int_{|w|=1} u(x+rw)\mathrm{d}S_w = u(x)\omega_n$.

(必要性) 已知U上的连续函数u满足平均值性质. 取$\varphi \in C_0^\infty\big(B_1(0)\big)$满足$\int_{B_1(0)} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$, 且$\varphi(x)$为径向函数, 设为$\varphi(x)=\psi(|x|)$, 则$\omega_n \int_0^1 r^{n-1}\psi(r)\mathrm{d}r = 1$. 置$\varphi_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\varphi\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$.

对$\forall x \in U$, $\varepsilon < \mathrm{dist}(x, \partial U)$, 有: $(\varphi_\varepsilon * u)(x) = \int_U u(x+y)\varphi_\varepsilon(y)\mathrm{d}y = \int_{|y|<1} u(x+\varepsilon y)\varphi(y)\mathrm{d}y$

$= \int_0^1 r^{n-1}\mathrm{d}r \int_{\partial B_1(0)} u(x+\varepsilon rw)\varphi(rw)\mathrm{d}S_w = \int_0^1 \psi(r) r^{n-1}\mathrm{d}r \int_{|w|=1} u(x+\varepsilon rw)\mathrm{d}S_w \xlongequal{\text{M.V.P}} u(x)$.

因此对$\forall\varepsilon > 0$, $\forall x \in U_\varepsilon := \{y \in U : \mathrm{dist}(y, \partial U) > \varepsilon\}$, $u(x) = (\varphi_\varepsilon * u)(x) \in C^\infty(U_\varepsilon)$.

$\therefore u \in C^\infty(U)$. 由充分性的证明知: 对$\forall B_r(x) \subset U$有

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y)\mathrm{d}y = r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{|w|=1} u(x+rw)\mathrm{d}S_w = r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\big(\omega_n u(x)\big) = 0.$$

由$B_r(x)$的任意性即得: $\Delta u(x) = 0$ $(\forall x \in U)$. □

事实上, 证明当中的φ总是可以取出的, 例如: $\varphi(x) = \begin{cases} C\cdot\exp\left\{\dfrac{1}{4|x|^2-1}\right\}, & |x| < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & |x| \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

§7.2 调和函数的梯度估计

定理7.4 (梯度估计)设$u \in C\big(\overline{B}_R(0)\big)$是$B_R(0)$上的调和函数, 则:

(1)$|\mathrm{D}u(x_0)| \leqslant \dfrac{n}{R}\max\limits_{\overline{B}_R(0)}|u|$, 特别地, 若$u \geqslant 0$, 则$|\mathrm{D}u(x_0)| \leqslant \dfrac{n}{R}u(x_0)$.

(2)对任意多重指标α, $|\mathrm{D}^\alpha u(x_0)| \leqslant \dfrac{n^{|\alpha|}\mathrm{e}^{|\alpha|-1}|\alpha|!}{R^{|\alpha|}}\max\limits_{\overline{B}_R(x_0)}|u|$.

证明 (1)易知, $\forall i = 1, \cdots, n$, $\mathrm{D}_{x_i}u$也是$B_R(x_0)$上的调和函数. 则

$$\mathrm{D}_{x_i}u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\nu_i \mathrm{d}S_y \Rightarrow \mathrm{D}u(x_0) = \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\nu \mathrm{d}S_y$$

$$\therefore |\mathrm{D}u(x_0)| \leqslant \frac{n}{\omega_n R^n}\int_{\partial B_R(x_0)}|u||\nu|\mathrm{d}S_y \leqslant \frac{n}{\omega_n R^n}\cdot\omega_n R^{n-1}\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)| = \frac{n}{R}\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)|.$$

特别地, $u \geqslant 0$时: $|\mathrm{D}u(x_0)| \leqslant \dfrac{n}{\omega_n R^n}\displaystyle\int_{\partial B_R(x_0)} u(y)\mathrm{d}S_y = \dfrac{n}{R}u(x_0)$.

(2)当$|\alpha| = 1$时, 由(1)知结论成立. 下面考察$|\alpha| = k$时, 如果结论成立, 当$|\alpha| = k+1$时, 取$0 < r < R$, 不妨只考察$\dfrac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}u(x_0)$:

$$\left|\frac{\partial^{k+1}}{\partial x_1^{k+1}}u(x_0)\right| \leqslant \frac{n}{r}\max_{x\in\bar{B}_r(x_0)}\left|\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}u(x)\right| \leqslant \frac{n}{r}\max_{x\in\bar{B}_r(x_0)}\left(\frac{n^k\mathrm{e}^{k-1}k!}{(R-r)^k}\max_{y\in\bar{B}_{R-r}(x)}|u(y)|\right)$$

$$\leqslant \frac{n^{k+1}\mathrm{e}^{k-1}k!}{r(R-r)^k}\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)| \xlongequal{r=\frac{R}{k+1}} \frac{n^{k+1}\mathrm{e}^{k-1}(k+1)!}{R^{k+1}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\max_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)|$$

$\leqslant \dfrac{n^{k+1}\mathrm{e}^k(k+1)!}{R^{k+1}}\max\limits_{y\in\bar{B}_R(x_0)}|u(y)|$. 由归纳法知, 结论得证. □

利用定理7.4(1)的特殊情况, 我们可以轻易推导出Liouville定理.

定理7.5 (Liouville定理)$\mathbb{R}^n$上的有上界或下界的调和函数必为常数.

证明 不妨设$u \geqslant 0$(请思考为什么). $\forall i=1,\cdots,n$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall R>0$, 有

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}u(x_0)\right| \leqslant \frac{n}{R}\max_{y\in \bar{B}_R(x_0)} u(x_0).$$

令$R\to +\infty$: 有$\dfrac{\partial}{\partial x_i}u(x_0)=0$ ($\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$), 进而$u$为常数. □

在多变量微积分中, 我们称f在U上解析, 如果$f \in C^\infty(U)$, 且对$\forall x_0 \in U$, $\exists r>0$, 使得$|x-x_0|<r$时, $f(x)$具有的Taylor展开$\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{\mathrm{D}^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha + R_m(x,x_0)$满足$\displaystyle\lim_{m\to\infty} R_m(x,x_0)=0$.

定理7.6 开区域上的调和函数一定在这个开区域上解析.

证明 取$B_{2r}(x)\subset U$, 取$h\in\mathbb{R}^n$满足$|h|<\dfrac{r}{2n^2\mathrm{e}}<r$. 取含Lagrange余项的Taylor展式:

$$u(x+h)=\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{\mathrm{D}^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha+\frac{1}{m!}\Big[\Big(\sum_{k=1}^n h_k\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)^m u\Big](x_1+\theta h_1,\cdots,x_n+\theta h_n)+R_m(h)$$

其中$\theta\in(0,1)$. 由定理7.4, 余项$|R_m(h)| \leqslant \dfrac{1}{m!}|h|^m n^m\dfrac{n^m\mathrm{e}^{m-1}m!}{r^m}\displaystyle\max_{y\in\bar{B}_r(x+\theta h)}|u(y)|$

$$\leqslant \frac{1}{m!}|h|^m n^m\frac{n^m\mathrm{e}^{m-1}m!}{r^m}\max_{y\in\bar{B}_{2r}(x)}|u(y)|=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{|h|n^2\mathrm{e}}{r}\right)^m\max_{\overline{B}_{2r}}|u|<\frac{1}{2^m\mathrm{e}}\max_{\overline{B}_{2r}}|u|.$$

$\therefore \displaystyle\lim_{m\to\infty}|R_m(h)|=0$, 即$u$是$U$上的解析函数. □

§7.3 Laplace方程的基本解

我们称Γ是Laplace方程$\Delta u=0$的基本解: $\Gamma(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\log|x|, & n=2,\\ \dfrac{1}{(2-n)w_n}|x|^{2-n}, & n\geqslant 3.\end{cases}$

容易得知, 在容许相差一个倍数和加上一个常数的情况下(即$C_1\Gamma(x)+C_2$), 它们是Laplace方程唯一的径向解.

性质7.7 $\Delta\Gamma=0$ ($\forall x\neq 0$), 且$\displaystyle\int_{\partial B_r(0)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}S=1$ ($\forall r>0$).

证明 $\Delta\Gamma=0$显然, 留作练习. 当$n\geqslant 3$时, $\displaystyle\int_{\partial B_r(0)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r(0)}\mathrm{D}\Gamma\cdot\frac{x}{r}\mathrm{d}S_x$

$$\xlongequal{x=rw}\int_{\partial B_1(0)}r^{n-1}\mathrm{D}\Gamma(rw)w\mathrm{d}S_w=r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial}{\partial r}\big(\Gamma(rw)\big)\mathrm{d}S_w$$
$$=r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^{2-n}}{(2-n)w_n}\right)\mathrm{d}S_w=\int_{\partial B_1(0)}\frac{1}{w_n}\mathrm{d}S_w=1.$$

对于$n=2$, $\displaystyle\int_{\partial B_r(0)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}S=r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\log|r|}{2\pi}\right)\mathrm{d}S_w=r\int_{\partial B_1(0)}\frac{\mathrm{d}S_w}{2\pi r}=1.$ □

以下讨论均以$n\geqslant 3$为例, $n=2$类似. 注意到$\nabla\cdot(v\mathrm{D}w)=\mathrm{D}v\cdot\mathrm{D}w+v\Delta w$. 由Green公式:

$$\int_U(v\Delta w+\mathrm{D}v\cdot\mathrm{D}w)\mathrm{d}x=\int_{\partial U}v\frac{\partial w}{\partial\nu}\mathrm{d}S_x$$

其中$w\in C^2(U)\cap C^1(\overline{U})$, $v\in C^1(U)\cap C(\overline{U})$. 如果$w,v\in C^2(U)\cap C^1(\overline{U})$, 则通过对称相减:

$$\int_U(v\Delta w-w\Delta v)\mathrm{d}x=\int_{\partial U}\left(v\frac{\partial w}{\partial\nu}-w\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_x.$$

定理7.8 (Green恒等式)$u\in C^2(U)\cap C^1(\overline{U})$, 则$\forall x\in U$, 有

$$u(x)=\int_U\Gamma(x-y)\Delta_y u(y)\mathrm{d}y-\int_{\partial U}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)-u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\right)\mathrm{d}S_y.$$

证明 $\forall r>0$, Γ在$U\backslash\big(B_r(0)\big)$上关于$y$是光滑的. 下面用$u$代替$u(y)$, Γ代替$\Gamma(x-y)$:

$$\int_{U\backslash B_r(x)}(\Gamma\Delta u-u\Delta\Gamma)\,\mathrm{d}y=\int_{\partial U}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y-\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$$

其中$\Delta_y\Gamma(x-y)=0\ (\forall y\in U\backslash B_r(x))$. 令$r\to0^+$:

$$\int_U\Gamma\Delta u\mathrm{d}y=\int_{\partial U}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y-\lim_{r\to0+}\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$$

其中$\left|\int_{\partial B_r(x)}\Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S_y\right|=\frac{r^{2-n}}{(n-2)w_n}\left|\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}S_y\right|\leqslant\frac{r^{2-n}}{(n-2)w_n}\left|\int_{\partial B_r(x)}|\mathrm{D}u||\nu|\mathrm{d}S_y\right|$

$$\le\frac{r^{2-n}}{(n-2)w_n}w_nr^{n-1}\max_{\partial B_r(x)}|\mathrm{D}u|=\frac{r}{n-2}\max_{\partial B_r(x)}|\mathrm{D}u|\to0\ (r\to0^+).$$

而$\int_{\partial B_r(x)}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}\mathrm{d}S_y=\int_{\partial B_r(x)}u\mathrm{D}\Gamma(x-y)\frac{y-x}{r}\mathrm{d}S_y\xlongequal{w=\frac{y-x}{r}}\int_{\partial B_1(0)}r^{n-1}u(x+rw)\frac{\partial}{\partial r}\left(\Gamma(rw)\right)\mathrm{d}S_w$
$=\frac{1}{w_n}\int_{\partial B_1(0)}u(x+rw)\mathrm{d}S_w\to u(x)\ (r\to0^+)$. 因此, 结论得证. □

我们令定理7.8中的$u\equiv1$, 则有$\int_{\partial U}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y=1\ (\forall x\in U)$. 我们还可以这样得到:

$$\int_{\partial U}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y=\int_{\partial\left(U\backslash B_r(x)\right)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y+\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y\ (\forall0<r<\operatorname{dist}(x,U))$$

其中$\int_{\partial\left(U\backslash B_r(x)\right)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y=\int_{U\backslash B_r(x)}\Delta\Gamma(x-y)\mathrm{d}y=0$. 因此

$$\int_{\partial U}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}S_y=\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_y}(x-y)\mathrm{d}y=1.$$

下面, 我们考虑D.P.问题: $\begin{cases}\Delta u(x)=f(x), & x\in U,\\ u(x)=g(x), & x\in\partial U.\end{cases}$ 对于$x\in U$, 考察$\phi(x,\cdot)\in C^2(U)$满足

$$\begin{cases}\Delta_y\phi(x,y)=0, & y\in U,\\ \phi(x,y)=\Gamma(x-y), & y\in\partial U.\end{cases}$$

对u和ϕ应用Green公式, 有: $\int_U(\phi\Delta u-u\Delta\phi)\,\mathrm{d}y=\int_{\partial U}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$

$$\Leftrightarrow\ 0=\int_U\phi\Delta u\mathrm{d}y-\int_{\partial U}\left(\phi\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$$

将Green恒等式与之相减, 有: $u(x)=\int_U(\Gamma-\phi)\Delta u\mathrm{d}y-\int_{\partial U}\left((\Gamma-\phi)\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial(\Gamma-\phi)}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S_y$

$$=\int_U(\Gamma(x-y)-\phi(x,y))f(y)\mathrm{d}y+\int_{\partial U}u(y)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\Gamma(x-y)-\phi(x,y)\right)\mathrm{d}S_y.$$

定义7.9 定义Green函数$G(x,y)\ (y\in U)$, 满足$G(x,y)=\Gamma(x-y)-\phi(x,y)$, 从而

$$u(x)=\int_UG(x,y)f(y)\mathrm{d}y+\int_{\partial U}u(y)\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\mathrm{d}S_y.$$

性质7.10 (1)$\forall y\in U\backslash\{x\}$, $\Delta_yG(x,y)=0$. (2)$\forall y\in\partial U$, $G(x,y)=0$. (3)$G(x,y)=G(y,x)$.

证明 (1)(2)是显然的, 只证明(3). 取定$x\neq y$, $x,y\in U$. $\exists r>0$, 使得$B_r(x)\cap B_r(y)=\varnothing$.

置$G_1(z)=G(x,z)$, $G_2(z)=G(y,z)$. 则

$$0=\int_{U\backslash(B_r(x)\cup B_r(y))}(G_1\Delta G_2-G_2\Delta G_1)\mathrm{d}z=\left(\int_{\partial U}-\int_{\partial B_r(x)}-\int_{\partial B_r(y)}\right)\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S.$$

从x的角度考察: $\displaystyle\int_{\partial B_r(x)}\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S$

$$-\int_{\partial B_r(x)}(\phi_1\Delta G_2-G_2\Delta\phi_1)\,\mathrm{d}z=\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S$$

同理: $\displaystyle\int_{\partial B_r(y)}\left(G_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r(y)}\left(G_1\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\nu}-\Gamma_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S.$

令$r\to 0^+$: $\displaystyle\lim_{r\to 0+}\left(\int_{\partial B_r(x)}\left(\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}-G_2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S+\int_{\partial B_r(y)}\left(G_1\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\nu}-\Gamma_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\right)\mathrm{d}S\right)=0\ldots(\bigstar)$

这里利用了$G_1\Big|_{\partial U}=0$, $G_2\Big|_{\partial U}=0$. 又因为$y\notin\overline{B}_r(x)$, 再利用散度公式:

$$\int_{\partial B_r(x)}\Gamma_1\frac{\partial G_2}{\partial\nu}\mathrm{d}S=\int_{\partial B_r(x)}\frac{|x-z|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\frac{\partial G_2(y,z)}{\partial\nu_z}\mathrm{d}S_z=\frac{r^{2-n}}{(2-n)\omega_n}\int_{\partial B_r(x)}\frac{G_2(y,x)}{\partial\nu_z}\mathrm{d}S_z=0.$$

同理$\displaystyle\int_{\partial B_r(x)}\Gamma_2\frac{\partial G_1}{\partial\nu}\mathrm{d}S=0$. 又由于

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_{\partial B_r(x)}G_2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu}\mathrm{d}S&=\lim_{r\to 0}\int_{\partial B_r(x)}G_2(y,z)\frac{1}{\omega_n}|x-z|^{-n}(x-z)\cdot\nu_z\mathrm{d}S_z\\&=\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{\partial B_r(x)}G_2(y,z)\frac{|x-z|^2}{\omega_n}\frac{1}{r}\mathrm{d}S_z=\lim_{r\to 0}\frac{1}{\omega r^{n-1}}\int_{\partial B_r(x)}G_2(y,z)\mathrm{d}S_z.\end{aligned}$$

且$\Delta G_2\big|_{z\in B_r(x)}\equiv 0\quad\therefore\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{\partial B_r(x)}G_2\frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu}\mathrm{d}S=G(y,x).$

同理, $\displaystyle\lim_{r\to 0}\int_{\partial B_r(y)}G_1\frac{\partial\Gamma_2}{\partial\nu}\mathrm{d}S=G(x,y)$. 把它们代入($\bigstar$)式, 有: $G(x,y)=G(y,x)\ (\forall x\neq y)$. □

定理7.11 $\forall x\neq y\ (x,y\in U)$, 有: $\begin{cases}\Gamma(x-y)<G(x,y)<0, & n\geqslant 3,\\ \Gamma(x-y)-\dfrac{1}{2\pi}\log\operatorname{diam}U<G(x,y)<0, & n=2.\end{cases}$

证明 固定$x\in U$, 记$G(y)=G(x,y)$.

由于$\displaystyle\lim_{y\to x}=-\infty$, 故而$\exists r>0$, 使得$G\big|_{\partial B_r(x)}<0$.

由于$G\big|_U\equiv 0$, 利用最大模原理: $G(y)<0(\forall y\in U)$.

1. 当$n\geq 3$时, $G(y)=\dfrac{|x-y|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}-\phi(x,y)<-\phi(x,y)\ (\forall y\in\partial U)\Rightarrow\phi(x,y)<G(y)\equiv 0\ (\forall y\in\partial U)$.

   同样由最大模原理, $\phi(y)<0\ (\forall y\in U)$. 所以$G(y)=\Gamma(x-y)-\phi(x,y)>\Gamma(x,y)\ (n\geqslant 3)$.
2. 当$n=2$时, $G(y)=\dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|-\phi(x,y)\leqslant\dfrac{1}{2\pi}\log\operatorname{diam}U-\phi(x,y)\ (\forall y\in\partial U)$.

   $\therefore$由最大模原理, $\phi(x,y)<\dfrac{1}{2\pi}\log\operatorname{diam}U\Rightarrow G(y)>\Gamma(x,y)-\dfrac{1}{2\pi}\log\operatorname{diam}U\ (\forall y\in U)$. □

定理7.12 考虑球$B_R(0)$上的Green函数:

$$G(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{|2-n|\omega_n}\left(|x-y|^{2-n}-\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|^{2-n}\right), & n\geqslant 3,\\ \dfrac{1}{2\pi}\left(\log|x-y|-\log\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|\right), & n=2.\end{cases}$$

证明 当$y\in\partial B_R(0)$时, 考虑x关于$\partial B_R(0)$的反射$X=\dfrac{R^2}{|x|^2}x$. 则$R^2=|X||x|$且x,X,O三点共线.

注意到$\triangle Oxy\backsim\triangle OyX$, 因此$\dfrac{|x|}{R}=\dfrac{R}{|X|}=\dfrac{|y-x|}{|y-X|}$, 从而

$$|y-x|=\frac{|X|}{R}|y-X|=\left|\frac{|x|}{R}y-\frac{R}{|x|}x\right|\ (\forall y\in\partial B_R(0)).$$

$\therefore$为了满足$\begin{cases}\Delta_y\phi(x,y)=0, & y\in U\\ \phi(x,y)\equiv\Gamma(x-y), & y\in\partial U\end{cases}$，只需取$\phi(x,y)=\dfrac{1}{(2-n)\omega_n}\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|^{2-n}$.

$\therefore G(x,y)=\dfrac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n}-\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|^{2-n}\right)$. 对于$n=2$同理可证. □

下面考察$G(x,y)$在球面上的法向导数.

定理7.13 设G是$B_R(0)$上的Green函数, 则$\dfrac{\partial G}{\partial\nu_y}(x,y)=\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_nR\,|x-y|^n}$ $(\forall x\in B_R(0),\ y\in\partial B_R(0))$.

证明 当$n\geqslant 3$时, 由定理7.12知:

$$G(x,y)=\frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|x-y|^{2-n}-\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}|y-X|^{2-n}\right)\ (\forall x\in B_R(0),y\in\partial B_R(0)).$$

$$\therefore \mathrm{D}_{y_i}G(x,y)=\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{-x_i+y_i}{|x-y|^n}-\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}\frac{y_i-X_i}{|X-y|^n}\right)=\frac{1}{\omega_n\,|x-y|^n}\left(y_i-x_i-\left(\frac{|x|}{R}\right)^2(X_i-y_i)\right)$$

$$=\frac{y_i}{\omega_nR^2}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\ \Rightarrow\ \frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x,y)=\sum_{i=1}^n\nu_{y_i}\mathrm{D}_{y_i}G(x,y)=\frac{1}{\omega_nR}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}.$$

对于$n=2$时, $G(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\left(\log|x-y|-\log\left|\dfrac{R}{|x|}x-\dfrac{|x|}{R}y\right|\right)$, 从而

$$\mathrm{D}_{y_i}G(x,y)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-x_i+y_i}{|x-y|^2}+\frac{\frac{R}{|x|}x_i-\frac{|x|}{R}y_i}{\left|\frac{R}{|x|}x-\frac{|x|}{R}y\right|^2}\frac{|x|}{R}\right)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-x_i+y_i}{|x-y|^2}+\frac{x_i-y_i}{|x-y|^2}\frac{|x|}{R}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{|x-y|^2}\left(y_i-x_i+\left(\frac{|x|^2}{R}\right)(x_i-y_i)\right)=\frac{y_i}{2\pi\,|x-y|^2}\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)=\frac{y_i}{\omega_nR^2}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2}.$$

故$\dfrac{\partial G}{\partial\nu_y}(x,y)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\nu_{y_i}\mathrm{D}_{y_i}G(x,y)=\dfrac{1}{\omega_nR}\dfrac{R^2-|x|^2}{|x-y|^2}$. □

定义7.14 记$K(x,y)=\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_nR|x-y|^n}$为Poisson核$(x\in B_R(0),y\in\partial B_R(0))$.

引理7.15 Poisson核具有如下性质:

(1)$K(x,y)$对$x\in B_R(0)$和$y\in\partial B_R(0)$光滑;

(2)$K(x,y)>0$, $\forall x\in B_R(0),\ y\in\partial B_R(0)$;

(3)对于固定的$y_0\in\partial B_R(0)$和$\delta>0$, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to y_0\\|x|<R}}K(x,y)=0$对$y\in\partial B_R(0)\backslash B_\delta(0)$一致成立;

(4)$\Delta_xK(x,y)=0$ $(\forall y\in\partial B_R(0))$;

(5)$\displaystyle\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)dS_y=1(\forall x\in B_R(0))$.

证明 设$U=B_R(0)$. (1)(2)是显然的, 下证(3)(4)(5).

(3)当$|x-y_0|<\dfrac{\delta}{2}$时, $(x\in U)$, $\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_nR|x-y|^n}\leqslant\dfrac{2^n}{\delta^n}\dfrac{2R}{\omega_nR}(R-|x|)$.

$$\therefore \sup_{y\in U\cap B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)}K(x,y)\leq\frac{2^{n+1}}{\omega_n\delta^n}(R-|x|)\ (\forall y\in\partial B_R(0)\backslash B_\delta(y_0)).$$

$$\therefore \lim_{\substack{x\to y_0\\x\in B_R(0)}}\sup_{y\in U\cap B_{\frac{\delta}{2}}(x_0)}K(x,y)\leq\frac{2^{n+1}}{\omega_n\delta^n}(R-|y_0|)=0.$$

因此, $\displaystyle\lim_{\substack{x\to y_0\\x\in B_R(0)}}K(x,y)=0$ 对$y\in\partial B_R(0)\backslash B_\delta(y_0)$一致成立.

(4)由$K(x,y)=\dfrac{R^2-|x|^2}{\omega_n R|x-y|^n}$知: $\mathrm{D}_x K(x,y)=-\dfrac{2x}{\omega_n R|x-y|^n}+\dfrac{n\left(R^2-|x|^2\right)}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}(x-y)$.

$$
\begin{aligned}
\therefore \Delta_x K(x,y)=&-\frac{2n}{\omega_n R|x-y|^n}+\frac{2nx\cdot\dfrac{x-y}{|x-y|}}{\omega_n R|x-y|^{n+1}}-\frac{n^2\left(R^2-|x|^2\right)}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\\
&+\left(\frac{n\cdot 2|x|\cdot\dfrac{x}{|x|}}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}+\frac{(n+2)\,n\left(R^2-|x|^2\right)}{\omega_n R|x-y|^{n+3}}\cdot\frac{x-y}{|x-y|}\right)\cdot(x-y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&-\frac{2n}{\omega_n R|x-y|^n}+\frac{2n|x|^2}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}-\frac{2nxy}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}+\frac{2n\left(R^2-|x|^2\right)}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\\
&+\frac{2n|x|^2}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}-\frac{2nxy}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\\
=&\frac{2n|x|^2}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\left(-|x-y|^2+|x|^2-xy+R^2-|x|^2+|x|^2-xy\right)\\
=&\frac{2n|x|^2}{\omega_n R|x-y|^{n+2}}\left(-|y|^2+2xy-xy+R^2-|x|^2+|x|^2-xy\right)=0\ \ (\forall y\in\partial B_R(0)).
\end{aligned}
$$

(5)$\displaystyle\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)\mathrm{d}S_y=\int_{\partial B_R(0)}\frac{\partial G}{\partial\nu_y}\mathrm{d}S_y=\int_{\partial B_R(0)}\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu_y}\mathrm{d}S_y-\int_{\partial B_R(0)}\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial\nu_y}\mathrm{d}S_y=1.$ □

定理7.16 对于$\varphi\in C(\partial B_R(0))$, 定义Possion公式:

$$
u(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\partial B_R}K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S_y, & x\in B_R(0),\\ \varphi(x), & x\in\partial B_R(0).\end{cases}
$$

它满足$u\in C^\infty(B_R(0))\cap C(\bar{B}_R(0))$且$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in B_R(0),\\ u=\varphi, & x\in\partial B_R(0).\end{cases}$

证明 由引理7.15知: u在$B_R(0)$上调和, 故$u\in C^\infty(B_R(0))$.

下面只需证 $u\in C(\bar{B}_R(0))$, 即对$\forall y_0\in\partial B_R(0)$, 有: $\displaystyle\lim_{\substack{x\to y_0\\|x|<R}}\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S_y=\varphi(y_0)$.

由引理7.15(5),对固定$\delta>0$, $\displaystyle\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}S_y-\varphi(y_0)$

$$
=\int_{\partial B_R(0)\cap B_\delta(y_0)}K(x,y)\left(\varphi(y)-\varphi(y_0)\right)\mathrm{d}S_y+\int_{\partial B_R(0)\setminus B_\delta(y_0)}K(x,y)\left(\varphi(y)-\varphi(y_0)\right)\mathrm{d}S_y:=I_1+I_2.
$$

由于$\varphi\in C\left(\partial B_R(0)\right)$, 所以$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta=\delta(\varepsilon)$, 使得

$$
|\varphi(y)-\varphi(y_0)|<\varepsilon\ \ (\forall y\in\partial B_R(0)\cap B_\delta(y_0))
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore |I_1|&\le\varepsilon\int_{\partial B_R(0)\cap B_\delta(y_0)}K(x,y)\mathrm{d}S_y\le\varepsilon\to 0\ (\varepsilon\to 0);\\
|I_2|&\le 2\cdot\max_{y\in\partial B_R(0)}|\varphi(y)|\cdot\int_{\partial B_R(0)}K(x,y)\mathrm{d}S_y\to 0\ \ (x\to y_0\text{且}x\in B_R(0)).
\end{aligned}
$$
□

定理7.17 设u在$B_R(0)\backslash\{0\}$上调和, 且$u(x)=\begin{cases}o(\log|x|), & n=2\\ o(|x|^(2-n)), & n\geqslant 3\end{cases}$ $(x\to 0)$, 则u可将$x=0$处补充定义为$B_R(0)$上的调和函数.

证明 不妨设$u\in C^1(\partial B_R)$. 由定理7.16, $\exists v$满足$\begin{cases}\Delta v=0, & x\in B_R(0),\\ v=u, & x\in\partial B_R(0).\end{cases}$

设$w(x)=v(x)-u(x)$, 下面考察$n\geqslant 3$的证明, $n=2$同理.

考虑$0<r<R$, 令$M_r=\max\limits_{\partial B_r}|w|$, 则$|w(x)|\leqslant M_r\dfrac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}$.

定义$\begin{cases} f_1(x)=w(x)+M_r(r|x|^{-1})^{n-2}, \\ f_2(x)=w(x)-M_r(r|x|^{-1})^{n-2}. \end{cases}$ 它们均是$B_R\backslash B_r$上的调和函数, 且在$\partial B_R\cup\partial B_r$上, $f_1\geqslant 0$, $f_2\leqslant 0$.

由最大模原理, 知: 在$B_R\backslash B_r$上, $f_1\geqslant 0$, $f_2\leqslant 0$. 故$|w(x)|\leqslant M_r\dfrac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}\dots(\bigstar)$

而$M_r=\max\limits_{\partial B_r}|v-u|\leqslant\max\limits_{\partial B_r}|v|+\max\limits_{\partial B_r}|u|$. 对$v$用最大模原理,知: $M_r\leqslant\max\limits_{\partial B_R}|v|+\max\limits_{\partial B_r}|u|$.

由于$\forall x\neq 0$, $\exists r_x>0$, 使得$x\in B_R\backslash B_r$ $(\forall 0<r<r_x)$. 利用$(\bigstar)$式:

$$|w(x)|\leqslant\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}(\max_{\partial B_R}|v|+\max_{\partial B_r}|u|)$$

由于$u(x)=o(|x|^{2-n})(x\to 0)$, 在上式令$r\to 0$, 有$r^{n-2}\max\limits_{\partial B_r}|u|\to 0$. 因此令$r\to 0$, $w(x)=0$. □

§7.4 Harnack不等式

定理7.18 (球上的Harnack不等式)设$u\leqslant 0$是B_R上的调和函数, 那么$\forall x\in B_R$,有:

$$\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\frac{R-|x|}{R+|x|}u(0)\leqslant u(x)\leqslant\left(\frac{R}{R-|x|}\right)^{n-2}\frac{R+|x|}{R-|x|}u(0).$$

证明 假设$u\in C(\overline{B}_R)$, Possion公式: $u(x)=\displaystyle\int_{\partial B_R}\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}u(y)\mathrm{d}y$.

对$|y|=R$, 我们有: $R-|x|\leqslant|x-y|\leqslant R+|x|$.

$$\therefore\frac{1}{\omega_nR}\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\frac{R-|x|}{R+|x|}\int_{\partial B_R}u(y)\mathrm{d}S_y\leqslant u(x)\leqslant\frac{1}{\omega_nR}\left(\frac{R}{R-|x|}\right)^{n-2}\frac{R+|x|}{R-|x|}\int_{\partial B_R}u(y)\mathrm{d}S_y.$$

再由u的均值性, 有: $\dfrac{1}{\omega_nR^{n-1}}\displaystyle\int_{\partial B_R}u(y)\mathrm{d}S_y=u(0)$.

$$\frac{1}{\omega_nR^{n-1}}\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\frac{R-|x|}{R+|x|}\int_{\partial B_R}u(y)\mathrm{d}S_y\leqslant u(x)\Longrightarrow\left(\frac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\frac{R-|x|}{R+|x|}u(0)\leqslant u(x).$$

对于不等式右侧是同理的, 因此结论得证. □

推论7.19 设$u\geqslant 0$是$U\subset\mathbb{R}^n$上的调和函数, $\overline{B_{2R}}(y)\subset U$, 则$\alpha(\frac{1}{2})u(y)\leqslant u(x)\leqslant\beta(\frac{1}{2})u(y)$ $(\forall x\in B_R(y))$, 其中$\alpha(t)=\dfrac{1-t}{(1+t)^{n-1}}$单调递减, 且$\beta(t)=\dfrac{1+t}{(1-t)^{n-1}}$单调递增.

证明 由定理7.18知, $u(x)\geqslant\left(\dfrac{R}{R+|x|}\right)^{n-2}\dfrac{R-|x|}{R+|x|}u(0)=\alpha(\dfrac{|x|}{R})u(0)$.

同理, $u(x)\leqslant\beta(\frac{|x|}{R})u(0)$. 利用$u\geqslant 0$且在$B_{2R}(y)$上调和, 将0换成$y$, x换成$x-y$, R换成$2R$:

$$\alpha\left(\frac{|x-y|}{2R}\right)u(y)\leqslant u(x)\leqslant\beta\left(\frac{|x-y|}{2R}\right)u(y).$$

若$x\in B_R(y)$, 则$\dfrac{|x-y|}{2R}<\dfrac{1}{2}$, 从而$\alpha\left(\dfrac{|x-y|}{2R}\right)\geqslant\alpha(\dfrac{1}{2})$, $\beta\left(\dfrac{|x-y|}{2R}\right)\leqslant\beta(\dfrac{1}{2})$.

$\therefore\alpha(\frac{1}{2})u(y)\leqslant u(x)\leqslant\beta(\frac{1}{2})u(y)$ $(\forall x\in B_R(y))$. □

定理7.20 设K是U上的紧子集, 则$\exists C=C(U,K)>0$, 使得$\forall u\geqslant 0$且在U上调和, 有

$$\frac{1}{C}u(y)\leqslant u(x)\leqslant Cu(y)\ (\forall x,y\in U).$$

证明 选取$0<R<\frac{1}{2}\operatorname{dist}(K,\partial U)$ (请思考为什么可以做到).

故存在有限个覆盖$B_R(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,N)$, 且能保证对任意的i, 有$x_i\in K$, 且$B_{2R}(x_i)\subset U$.

对$\forall x,y\in K$, 取$x_{j_1},\cdots,x_{j_s}\in\{x_1,\cdots,x_N\}$. 取$z_0,\cdots,z_s\in U$, 使得

$$z_0=x,\ z_s=y,\ z_{i-1},z_i\in B_R(x_{j_i})\ (i=1,2,\cdots,s).$$

应用推论7.19, 我们有:

$$\alpha^s(\frac{1}{2})u(y)\leqslant\alpha^{s-1}(\frac{1}{2})u(z_{s-1})\leqslant\cdots\leqslant\alpha(\frac{1}{2})u(x)\leqslant\beta(\frac{1}{2})u(z_1)\leqslant\cdots\leqslant\beta^s(\frac{1}{2})u(y).$$

进而选取$C=\max\left\{\beta^s(\frac{1}{2}),\alpha^{-s}(\frac{1}{2})\right\}=C(U,K,n)$, 有$\frac{1}{C}u(y)\leqslant u(x)\leqslant Cu(y)$ $(\forall x,y\in K)$. □

定义7.21 设$u\in C^2(U)$,称它是下(上)调和函数, 如果它满足$\Delta u\leqslant(\geqslant)0$ $(\forall x\in U)$.

定理7.22 设$u\in C^2(B_1\cap C(\overline{B_1})$是下调和函数在$B_1$上, 即$\forall x\in B_1(0)$, $\Delta u(x)\geqslant 0$, 则$\sup\limits_{B_1}u\leqslant\sup\limits_{\partial B_1}u$. 若$u\in C^2(U)$是下（上）调和函数, 则$\forall B_r(x)\subset U$, 有:

$(1)u(x)\geqslant(\leqslant)\dfrac{1}{|\partial B_r(x)|}\displaystyle\int_{\partial B_r(x)}u(y)\mathrm{d}S_y$;

$(2)u(x)\geqslant(\leqslant)\dfrac{1}{|\partial B_r(x)|}\displaystyle\int_{B_r(x)}u(y)\mathrm{d}y$.

证明 只需证(1)下调和的情况. $0\geqslant\displaystyle\int_{B_\rho(x)}\Delta u(y)\mathrm{d}y=\rho^{n-1}\int_{\partial B_1(0)}\frac{\partial}{\partial\rho}u(x+\rho\omega)\mathrm{d}S_\omega$.

因此, 对ρ在$\dfrac{\partial}{\partial\rho}\displaystyle\int_{\partial B_1(0)}u(x+\rho\omega)\mathrm{d}S_\omega\leqslant 0$两边从0到$r$积分即可. □

定理7.23 设$u\in C^2(B_1)\cap C(\overline{B}_1)$是$B_1$上的上调和函数, 则$\sup\limits_{B_1}u\leqslant\sup\limits_{\partial B_1}u$.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 考虑$u_\varepsilon(x)=u(x)+\varepsilon|x|^2$ $(x\in B_1(0))$, 则$\Delta u_\varepsilon=\Delta u+2n\varepsilon\geqslant 0\ldots(\bigstar)$.

$\sup\limits_{B_1}u_\varepsilon\leqslant\sup\limits_{\partial B_1}u_\varepsilon$, 否则, 令$x_0\in B_1$, 使得$u_\varepsilon(x_0)=\max\limits_{\overline{B_1}}u_\varepsilon$, 则$\Delta u_\varepsilon(x_0)\leqslant 0$与$(\bigstar)$矛盾!

注意到: $\sup\limits_{B_1}u\leqslant\sup\limits_{B_1}u_\varepsilon\leqslant\sup\limits_{\partial B_1}u_\varepsilon\leqslant\sup\limits_{\partial B_1}u+\varepsilon$, 令$\varepsilon\to 0^+$, 有: $\sup\limits_{B_1}u\leqslant\sup\limits_{\partial B_1}u$. □

这里是弱极大值原理, 仅仅是在边界达到, 却并非只能在边界上取到. 事实上, 它适用于任意有界区域.

我们知道Young不等式具有如下形式:

(1)对$\forall\varepsilon>0$, $a,b>0$, $ab\leqslant\varepsilon a^2+\dfrac{b^2}{4\varepsilon}$; $(2)\forall\varepsilon>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, $ab\leqslant\dfrac{\varepsilon a^p}{p}+\dfrac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q}{q}$.

利用上述Young不等式的形式, 我们得到如下性质:

定理7.24 若u是B_1上的调和函数, 则$\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}}|\mathrm{D}u|\leqslant c\sup\limits_{\partial B_1}|u|$.

证明 $\Delta(|\mathrm{D}u|^2)=\displaystyle\sum_{i,j=1}^n\mathrm{D}_i(2\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_{ij}u)=2\sum_{i,j=1}^n(\mathrm{D}_{ij}u)^2+2\sum_{j=1}^n\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_j(\Delta u)=2\sum_{i,j=1}^n(\mathrm{D}_{ij}u)^2$.

下面取$\eta\in C_0^2(B_1)$, 使得$\forall x\in B_{\frac{1}{2}}$, $\eta\equiv 1$, 则

$$\begin{aligned}\Delta(\eta^2|\mathrm{D}u|^2)&=\Delta(\eta^2)|\mathrm{D}u|^2+2\mathrm{D}(\eta^2)\mathrm{D}(|\mathrm{D}u|^2)+\eta^2\Delta(|\mathrm{D}u|^2)\\&=2\eta\Delta\eta|\mathrm{D}u|^2+2|\mathrm{D}\eta|^2|\mathrm{D}u|^2+8\eta\sum_{i,j=1}^n\mathrm{D}_i\eta\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_{ij}u+2\eta^2\sum_{i,j=1}^n(\mathrm{D}_{ij}u)^2\ldots(\bigstar).\end{aligned}$$

利用Young不等式:

$$\left|8\eta\sum_{i,j=1}^n\mathrm{D}_i\eta\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_{ij}u\right|\leqslant 8\sum_{i,j=1}^n\left(\frac{1}{4\varepsilon}|\mathrm{D}_i\eta|^2|\mathrm{D}_ju|^2+\varepsilon\eta^2|\mathrm{D}_{ij}u|^2\right)=\frac{2}{\varepsilon}|\mathrm{D}\eta|^2|\mathrm{D}u|^2+8\varepsilon\eta^2\sum_{i,j=1}^n|\mathrm{D}_{ij}u|^2.$$

取$\varepsilon=\dfrac{1}{4}$,有: $\left|8\eta\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{D}_i\eta\mathrm{D}_ju\mathrm{D}_{ij}u\right|\leqslant 8\left|\mathrm{D}\eta\right|^2\left|\mathrm{D}u\right|^2+2\eta^2\sum_{i,j=1}^{n}|\mathrm{D}_{ij}u|^2$. 代入(★):

$$\Delta(\eta^2\left|\mathrm{D}u\right|^2)\geqslant 2\eta\Delta\eta\left|\mathrm{D}u\right|^2-8\left|\mathrm{D}\eta\right|^2\left|\mathrm{D}u\right|^2=(2\eta\Delta\eta-6\left|\mathrm{D}\eta\right|^2)\left|\mathrm{D}u\right|^2=-c(\eta)\left|\mathrm{D}u\right|^2$$

其中$c(\eta)>0$只与n有关. 又$\Delta(u^2)=2u\Delta u+2\left|\mathrm{D}u\right|^2=2\left|\mathrm{D}u\right|^2$, 故对足够大的$\alpha>0$, 有:

$$\Delta(\eta^2\left|\mathrm{D}u\right|^2+\alpha n^2)\geqslant(2\alpha-c)\left|\mathrm{D}u\right|^2\geqslant 0.$$

由定理7.23: $\sup\limits_{B_1}(\eta^2\left|\mathrm{D}u\right|^2+\alpha u^2)\leqslant\sup\limits_{\partial B_1}(\eta^2\left|\mathrm{D}u\right|^2+\alpha u^2)$, 故

$$\sup_{B_{\frac12}}\left|\mathrm{D}u\right|^2=\sup_{B_1}(\eta^2\left|\mathrm{D}u\right|^2)\leqslant\alpha\sup_{\partial B_1}u^2\Rightarrow\sup_{B_{\frac12}}\left|\mathrm{D}u\right|\leqslant\sqrt{\alpha}\sup_{\partial B_1}|u|\,. \quad\square$$

定理7.25 设$u\geqslant 0$是B_1上的调和函数, 则$\sup\limits_{B_{\frac12}}|\mathrm{D}\log u|\leqslant c$, 其中$c=c(n)$.

证明 不妨设$u>0$ ($\forall x\in B_1$), 令$v=\log u$, 则$\Delta v=\mathrm{D}(\dfrac{\mathrm{D}u}{u})=\dfrac{\Delta u}{u}-\dfrac{\left|\mathrm{D}u\right|^2}{u^2}=-\left|\mathrm{D}v\right|^2$.

令$w=\left|\mathrm{D}v\right|^2$, 则$\Delta w=2\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2+2\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\Delta v)\Rightarrow\Delta w+2\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(w)=2\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2$.

取一个非负截断函数$\varphi\in C_0^2(B_1)$, 使得$\dfrac{|\mathrm{D}\varphi|^2}{\varphi}$在$B_1$上有界. 则

$$\Delta(\varphi w)+2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\varphi w)=(\Delta\varphi)w+2\mathrm{D}\varphi\cdot\mathrm{D}w+\varphi(\Delta w+2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_iw)+2w\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i\varphi$$

$$=2\varphi\sum_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2+4\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{D}_i\varphi\mathrm{D}_jv\mathrm{D}_{ij}v+2w\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i\varphi+(\Delta\varphi)w\ldots(\bigstar),\text{ 其中}$$

$$\left|4\sum_{i,j=1}^{n}\mathrm{D}_i\varphi\mathrm{D}_jv\mathrm{D}_{ij}v\right|=\left|4\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{D}_i\varphi}{\sqrt{\varphi}}\mathrm{D}_jv\right)(\sqrt{\varphi}\mathrm{D}_{ij}v)\right|$$

$$\leqslant 4\sum_{i,j=1}^{n}(\frac{(\mathrm{D}_i\varphi)^2}{4\varepsilon\varphi}(\mathrm{D}_jv)^2+\varepsilon\varphi(\mathrm{D}_{ij}v)^2)\xlongequal{\varepsilon=\frac14}4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{(\mathrm{D}_i\varphi)^2}{\varphi}(\mathrm{D}_jv)^2+\varphi(\mathrm{D}_{ij}v)^2\ldots(\bigstar^1).$$

同时, $\left|2w\sum\limits_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i\varphi\right|\leqslant 2w|\mathrm{D}v||\mathrm{D}\varphi|=2|\mathrm{D}v|^3|\mathrm{D}\varphi|\ldots(\bigstar^2)$.

把$(\bigstar^1)$和$(\bigstar^2)$代入$(\bigstar)$: $\Delta(\varphi w)+2\sum\limits_{i=1}^{2}n\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\varphi w)\geqslant\ \varphi\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2-\dfrac{4|\mathrm{D}\varphi|^2}{\varphi}|\mathrm{D}v|^2$

$$-2|\mathrm{D}\varphi||\mathrm{D}v|^3-|\Delta\varphi|w=\ \varphi\sum_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2-2|\mathrm{D}\varphi||\mathrm{D}v|^3-\left(|\Delta\varphi|+\frac{4|\mathrm{D}\varphi|^2}{\varphi}\right)|\mathrm{D}v|^2.$$

又因为$\sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{D}_{ij}v)^2\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathrm{D}_{ii}v)^2\geqslant\dfrac{1}{n}(\Delta v)^2=\dfrac{w^2}{n}$, 故:

$$\Delta(\varphi w)+2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\varphi w)\geqslant\frac{\varphi}{n}w^2-2|\mathrm{D}\varphi|w^{\frac32}-\left(|\Delta\varphi|+\frac{4|\mathrm{D}\varphi|^2}{\varphi}\right)w.$$

取$\varphi=\eta^4\in C_0^2(B_1)$, 使得$\eta\equiv 1$ ($x\in B_{\frac12}$), 则

$$\Delta(\eta^4w)+2\sum_{i=1}^{n}\mathrm{D}_iv\mathrm{D}_i(\eta^4w)\geqslant\frac{1}{n}\eta^4w^2-8|\mathrm{D}\eta|(\eta^2w)^{\frac32}-4(\eta|\Delta\eta|+19\eta^2|\mathrm{D}\eta|^2)(\eta^2w).$$

由Young不等式: $8|\mathrm{D}\eta|(\eta^2w)^{\frac32}\leqslant\dfrac{8\varepsilon(\eta^2w)^2}{\frac{4}{3}}+\dfrac{8\varepsilon^{-3}|\mathrm{D}\eta|^4}{4}\xlongequal{\varepsilon=\frac{1}{24n}}\dfrac{1}{4n}\eta^4w^2+C(n,\eta)$.

且$4(\eta|\Delta\eta|+19\eta^2|\mathrm{D}\eta|^2)(\eta^2w)\leqslant 4\varepsilon(\eta^2w)^2+\dfrac{1}{\varepsilon}(\eta|\mathrm{D}\eta|+19\eta^2|\mathrm{D}\eta|^2)\xlongequal{\varepsilon=\frac{1}{16n}}\dfrac{1}{4n}\eta^4w^2+C(n,\eta)$.

设$\eta^4 w$在$x_0 \in B_1$处取最大值, 则$\Delta(\eta^4 w)(x_0) \leqslant 0$且$\mathrm{D}(\eta w)(x_0) = 0 \therefore \Delta(\eta^4 w^2)(x_0) \leqslant C(n, \eta)$.

若$w(x_0) \geqslant 1$, 则$\eta^4 w(x_0) \leqslant \eta^4 w^2(x_0) \leqslant C(n, \eta)$.

否则, $w(x_0) < 1$, $\eta^4 w(x_0) < \eta^4(x_0) \leqslant C(n, \eta) \Rightarrow \eta^4 w \leqslant C(n, \eta)\ (x \in B_1)$.

$\therefore w(x) \leqslant C(n, \eta)(\forall x \in B_{\frac{1}{2}})$, 此即$\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}(0)} |\mathrm{D}\log u| \leqslant C(n)$. □

定理7.26 设$u > 0$是$B_1(0)$上的调和函数, 则$\sup\limits_{B_{\frac{1}{2}}(0)} |\mathrm{D}\log u| \leqslant n$

证明 利用梯度估计: $|\mathrm{D}u(x)| \leqslant nu(x)\ (\forall x \in B_{\frac{1}{2}}) \therefore |\mathrm{D}\log u(x)| \leqslant n\ (\forall x \in B_{\frac{1}{2}})$. □

推论7.27 设$B_1(0)$上调和函数$u \geqslant 0$, 则$u(x_1) \leqslant C(n)u(x_2)\ (\forall x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}(0))$.

证明 假设$u > 0\ (x \in B_1)$. $\forall x_1, x_2 \in B_{\frac{1}{2}}$:

$$\log\frac{u(x_1)}{u(x_2)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\log u(tx_1 + (1-t)x_2))\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\mathrm{D}(\log u(tx_1 + (1-t)x_2))||x_1 - x_2|\mathrm{d}t$$

$\leqslant C(n)|x_1 - x_2| \leqslant C(n)$, 因此$u(x_1) \leqslant \mathrm{e}^{C(n)}u(x_2)$. □

如果是B_R的情况, 以上讨论做一个伸缩即可.

参考文献

[1] 金福临. 常微分方程. 上海: 上海科学技术出版社, 1960

[2] 菲利波夫. 常微分方程习题集. 上海: 上海科学技术出版社, 1981

[3] 庄万. 常微分方程习题解. 济南: 山东科学技术出版社, 2003

[4] 丁同仁, 李承治. 常微分方程. 北京: 高等教育出版社, 2004

[5] 李尚志. 线性代数. 北京: 高等教育出版社, 2006

[6] 陈祖墀. 偏微分方程. 北京: 高等教育出版社, 2008

[7] 季孝达, 薛兴恒, 陆英, 宋立功. 数学物理方程(第二版). 北京: 科学出版社, 2009

[8] Lawrence C. Evans. Partial differential equations(2rd ver). American Mathematical Society, 2010

[9] 常庚哲, 史济怀. 数学分析教程. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2013

[10] 张永兵. 微分方程I课程讲义. 未出版, 2019

[11] 吴天. 数学分析(B1)习题课讲义. 未出版, 2017

[12] 吴天. 微分方程II习题课讲义. 未出版, 2019